Corso di Geometria II Anno Accademico 2014/2015

Elementi di Teoria degli Insiemi

Notazione e Terminologia

Useremo la seguente notazione.

$a \in A$ = l'elemento a appartiene all'insieme A

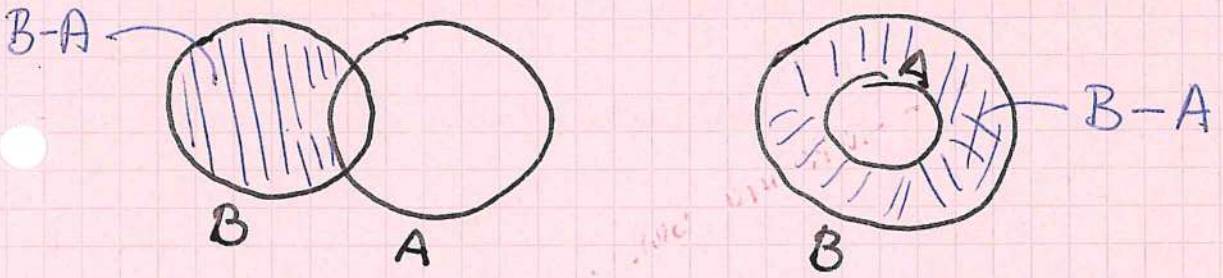
$a \notin A$ = " " non appartiene all'insieme A

$A \subseteq B$ $A \subset B$ = A contenuto strettamente in B

Intersezione e unione sono indicate con $\cap$ e $\cup$, rispettivamente.

Se A e B sono due sottoinsiemi, il complemento di A in B è definito come

$$B - A = \{ b \in B \mid b \notin A \}$$



Sia I un insieme di indici. Allora valgono le

Leggi di De Morgan

$$S - \bigcup_I A_i = \bigcap_I (S - A_i)$$

$$S - \bigcap_I A_i = \bigcup_I (S - A_i)$$

Dati n insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, il loro <u>prodotto cartesiano</u> è dato da

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

<u>o applicazione</u>

Una funzione $f : A \to B$ è una legge che assegna in modo univoco ad ogni elemento $a \in A$ un elemento $f(a) \in B$, detto l'immagine di a tramite f.

A è detto il <u>dominio</u> di f
B è detto il <u>codominio</u> di f

Dato un sottoinsieme $C \subseteq A$, indichiamo con $f(C)$ l'<u>Immagine di C in B</u>, definita come

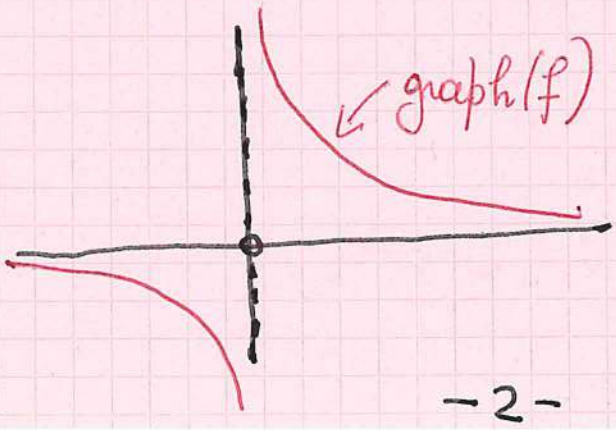
$$f(C) = \{ b \in B \mid b = f(c) \text{ per qualche } c \in C \} \subset B$$

In particolare, $f(A) \subset B$ è detta <u>l'immagine di f</u>, indicata anche con il simbolo $\mathrm{Im}(f)$.

Il <u>grafico</u> di f è il sottoinsieme di $A \times B$ dato da

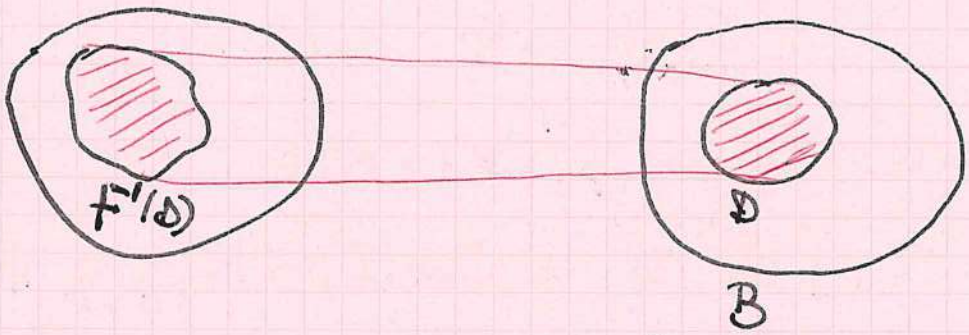
$$\mathrm{graph}(f) = \{ (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \}$$

<u>Es</u> $\quad f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$



Dato $D \subseteq B$, definiamo l'immagine inversa di D in A come

$$f^{-1}(D) = \{ a \in A \mid f(a) \in D \} \subset A$$



Osservazione

Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione fra insiemi.

(1) Se $A \subset X$, allora

$$A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

Infatti, sia $a \in A$. Allora per definizione $f(a) \in f(A)$, ossia $a \in f^{-1}(f(A))$

L'inclusione può essere stretta, come si vede dall'esempio seguente.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

$A \subset \mathbb{R}$, $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$.

Allora $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R}$, cioè $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$

(2) Sia $B \subset Y$. Allora

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

Infatti $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x)$ con $x \in f^{-1}(B)$

Ma $x \in f^{-1}(B)$ vuol dire precisamente $f(x) \in B$, cioè $y \in B$.

Di nuova, l'inclusione può essere stretta come mostrato dal seguente esempio.
Come prima, sia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

Sia $B = \mathbb{R}$. Allora $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$ e

$$f(f^{-1}(B)) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0} \subsetneq \mathbb{R} = B$$

Def

Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione fra insiemi.

(1) f si dice iniettiva se

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(2) f si dice suriettiva se $\mathrm{Im} f = Y$

(3) f si dice bijettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Ad esempio,

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ non è nè iniettiva né suriettiva
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ è iniettiva ma non suriettiva
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \to x^2$ è suriettiva ma non iniettiva
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \to x^2$ è bijettiva.

Def Sia $f: X \to Y$ una funzione e sia $y \in Y$ un punto. La *fibra* di f nel punto y è l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

Osserviamo che:

(1) f è iniettiva se e solo se $f^{-1}(y)$ contiene *al più un punto* per ogni $y \in Y$

(2) f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ per ogni $y \in Y$

(3) f è biettiva se e solo se $f^{-1}(y)$ contiene esattamente un punto $x \in X$ per ogni $y \in Y$.

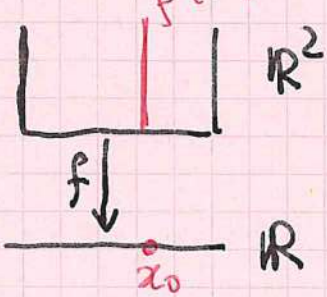
Esempio

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad f(x) \longmapsto (x, 0)$ è iniettiva. Si ha

$$f^{-1}(x_0, y_0) = \begin{cases} x_0 & \text{se } y_0 = 0 \\ \emptyset & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x$ è suriettiva. Si ha

$$f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$



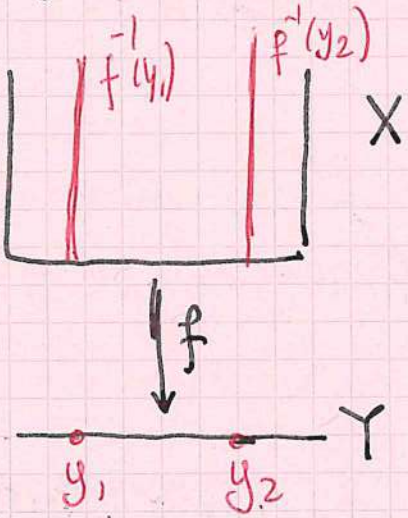
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$ è biettiva.

$$f^{-1}(x_0) = \sqrt[3]{x_0}$$

Osservazione: Sia $f: X \to Y$ una funzione e $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Allora le due fibre $f^{-1}(y_1)$, $f^{-1}(y_2)$ sono disgiunte. Infatti, supponiamo per assurdo che esista $x \in X$ tale che $x \in f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2)$. Ma allora, per definizione

$$f(x) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x) = y_2,$$

contraddizione dato che $y_1 \neq y_2$.



Data una funzione $f: X \to Y$ e un sottoinsieme $Z \subset X$, possiamo considerare la **restrizione** di f a Z, indicata con $f_{|Z}$, che è la funzione

$$f_{|Z}: Z \longrightarrow Y$$
$$f_{|Z}(z) = f(z) \qquad \forall z \in Z$$

Diremo anche che $f: X \to Y$ è un' **estensione** di $f_{|Z}$ ad X.

Osservazione. Sia $f: X \to Y$ un'applicazione.
Allora, se $A, B \subseteq X$ si ha

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Cominciamo a dimostrare (1).
Sia $y \in f(A \cup B)$. Allora $y = f(x)$ con $x \in A \cup B$, cioè $x \in A$ oppure $x \in B$. Segue che $f(x) \in f(A)$ oppure $f(x) \in f(B)$, cioè $y \in f(A) \cup f(B)$.
Questo mostra che $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

Sia ora $y \in f(A) \cup f(B)$. Allora $y \in f(A)$ oppure $y \in f(B)$, cioè $y = f(x)$ con $x \in A$ oppure $x \in B$, cioè $y = f(x)$ con $x \in A \cup B$, cioè $y \in f(A \cup B)$.
Questo mostra che $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

Ora mostriamo (2)
Sia $y \in f(A \cap B)$. Allora $y = f(x)$ con $x \in A \cap B$, cioè $y = f(x)$ con $x \in A$ e $x \in B$, cioè
$y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, cioè $y \in f(A) \cap f(B)$.
Questo mostra che $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Nel punto (2) l'eguaglianza non è in genere verificata. Infatti, sia

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

Sia $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $B = \mathbb{R}_{\leq 0}$. Allora

$f(A \cap B) = f(0) = \{0\}$
$f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Cardinalità

Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gli insiemi numerici. Per noi $0 \in \mathbb{N}$

Definizione Siano X, Y due insiemi. Diremo che X e Y hanno la stessa cardinalità, e scriveremo $|X| = |Y|$, se esiste un'applicazione biettiva

$$f : X \to Y$$

Useremo anche la notazione $\mathrm{Card}(X)$ per indicare la cardinalità.

Definizione Un insieme X si dice finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}\{1, 2, \dots, n\}$$

Un insieme che non è finito si dice infinito.

Un insieme si dice numerabile se

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$$

Dunque un insieme è finito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ (per qualche n) e un insieme è numerabile se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Oss "Avere la stessa cardinalità" è ovviamente una relazione di equivalenza.

Esempio 1 Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se contengono lo stesso numero di elementi. Infatti $\{1, 2, \dots, n\}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\{1, \dots m\}$ se e solo se $n = m$. In particolare, un insieme finito non ha mai la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio.

Esempio 2 Un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio.

Ad esempio,

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Z})$$

e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ è un sottoinsieme proprio. Una biezione esplicita fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ può essere data come segue:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} 2n & n > 0 \\ 1 - 2n & n \leq 0 \end{cases}$$

- Un altro esempio è il seguente – fra $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ il sottoinsieme dei naturali pari. Allora

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$

$$f(n) = 2 \cdot n$$

è una funzione biettiva, dunque $\text{Card}(2\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N})$

- Un altro esempio ancora: la funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ data da $f(n) = n + 1$ è una biezione. Dunque

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N} - \{0\})$$

Proposizione Valgono i seguenti fatti:

(1) L'unione numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile

(2) Il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è ancora numerabile

(3) $\mathbb{Q}$ è numerabile

(4) $\mathbb{R}$ è non numerabile

Dimostrazione

(1) Sia $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ una collezione numerabile di insiemi numerabili.

Poniamo

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - A_2 - A_1 \\ &\vdots \\ B_k &= A_k - A_{k-1} - A_{k-2} - \dots - A_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allora ogni B_i è numerabile e

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Inoltre

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$$

(in altre parole, siamo passati ai B_i in modo da eliminare eventuali elementi "ripetuti" nella famiglia originaria $\{A_1, A_2, \dots\}$)

A questo punto numeriamo gli elementi di ogni B_i come segue

$$B_1 = \{ b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, \dots \}$$

$$B_2 = \{ b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, \dots \}$$

$$B_3 = \{ b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, \dots \}$$

$$B_4 = \{ b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, \dots \}$$

Allora possiamo "contare" gli elementi dell'unione $\bigcup B_n$ seguendo lo schema dato dalla linea rossa in figura. In altre parole, definiamo un'applicazione

$$f : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$f(1) = b_{11}$$
$$f(2) = b_{21}$$
$$f(3) = b_{12}$$
$$f(4) = b_{13}$$
$$f(5) = b_{22}$$

e così via.

Questa applicazione è chiaramente bijettiva, dunque $\bigcup_{n=1} B_n$ è numerabile.

(2) Siano A e B due insiemi numerabili, e numeriamo i loro elementi come segue:

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots \} \qquad B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots \}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$A_n := A \times \{b_n\} = \{(a, b_n) \mid a \in A\}$$

Allora ogni A_n è numerabile e si ha

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Per la parte (1) segue allora che $A \times B$ è numerabile.

3) Scriviamo ogni elemento di $\mathbb{Q}$ come m/n, dove la frazione è ridotta ai minimi termini. Allora posso considerare l'applicazione

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$$

L'applicazione f è iniettiva, dato che la scrittura di una frazione ridotta ai minimi termini è unica. Dunque ho una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{Q}$ e $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ma $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile per la parte (1), e ogni sottoinsieme di un insieme numerato è finito oppure numerabile. Dato che $\mathbb{Q}$ è infinito, segue che $\mathbb{Q}$ è numerabile. (Esercizio!)

(4) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei reali. Vogliamo mostrare che $\mathbb{R}$ è non numerabile. Ragioniamo per assurdo, applicando quello che viene in genere chiamato il procedimento diagonale di Cantor.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}$ sia numerabile.
Allora l'intervallo $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ sarà anch'esso numerabile, cioè esisterà una funzione biettiva

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow I$$

$f(1) = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots$
$f(2) = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots$ (scritti secondo i loro
$f(3) = 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots$ sviluppi decimali).
$\vdots$
$f(n) = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots$
$\vdots$

Definiamo ora un numero reale b come segue:

$$b = 0, b_{11}\, b_{22}\, b_{33} \ldots$$

dove

$$b_{11} \neq a_{11}, \quad b_{22} \neq a_{22}, \ldots, b_{nn} \neq a_{nn}, \ldots$$

Allora b differisce da ogni $f(n)$ nella posizione a_{nn}, dunque $b \neq f(n)$ per ogni n.

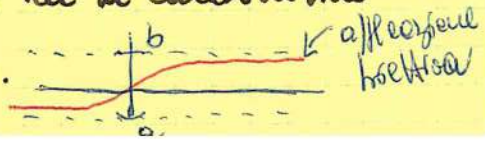
Ma allora $b \in [0,1)$ ma $b \notin \operatorname{Im} f$.

Questa è una contraddizione, avendo supposto che f fosse biettiva. ■

Definizione Un insieme X si dice avere la **cardinalità del continuo** se

$$\operatorname{card}(X) = \operatorname{Card}(\mathbb{R})$$

Esempio Ogni intervallo aperto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo.



Definizione Siano X, Y due insiemi.

(1) Diremo che

$$\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$$

se esiste una applicazione iniettiva

$$f : X \longrightarrow Y$$

Equivalentemente, questo vuol dire che

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y')$$

dove Y' è un sottoinsieme di Y.

(2) Diremo che

$$\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y)$$

se $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ e $\mathrm{Card}(X) \neq \mathrm{Card}(Y)$

Equivalentemente, questo vuol dire che esiste una applicazione iniettiva

$$f : X \longrightarrow Y$$

ma non esiste nessuna applicazione biiettiva $f : X \longrightarrow Y$.

Esempio Abbiamo visto che $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \neq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Siccome $\mathbb{N}$ è sottoinsieme di $\mathbb{R}$, possiamo scrivere

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

e, analogamente

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

L'ipotesi del Continuo (Cantor, 1878)

L'Ipotesi del Continuo, formulata da Hilbert come uno dei suoi famosi problemi nel 1900 (oltre giustamente come il Problema N° 1) asserisce che non esiste nessun insieme A tale che

$$\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(A) < \text{card}(\mathbb{R})$$

ossia che non esiste nessuna cardinalità strettamente compresa tra la cardinalità del numerabile e la cardinalità del continuo.

Oggi si sa che l'ipotesi del continuo è indipendente dalla teoria assiomatica degli insiemi comunemente utilizzata (Teoria ZFC: Zermelo-Fraenkel + Choice)
In altre parole, sia essa che la sua negazione possono essere aggiunte a ZFC, e la teoria risultante è consistente se e solo se ZFC lo è.
Questo fu dimostrato da P. Cohen nel 1963 (risultato parziale erano stati ottenuti da Gödel nel 1940).

Non faremo uso dell'ipotesi del continuo (né della sua negazione) nel seguito del Corso.

Definizione (Insieme delle parti)

Sia X un insieme. Indicheremo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X (detto anche l'"insieme delle parti di X") e con $\mathcal{P}_0(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di X.

← Il vuoto $\emptyset$ lo vedo come sottoinsieme di X

Esempio Se X è numerabile, allora $\mathcal{P}_0(X)$ è ancora numerabile.

Infatti, possiamo identificare X con $\mathbb{N}$

$$X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Costruiamo ora l'applicazione seguente:

Notiamo ora che gli insiemi finiti che contengono solo le cifre $\{1, 2, \dots, k\}$ sono in numero finito.

Sia

$$C_k = \{ \text{insiemi finiti che contengono solo le cifre } \{1, 2, \dots, k\} \}.$$

Allora

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$$

Abbiamo visto come l'unione numerabile di insiemi numerabili sia numerabile. In particolare, l'unione numerabile di insiemi finiti è numerabile, dunque $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ è numerabile.

Si può scrivere esplicitamente una biezione fra $P_0(\mathbb{N})$ e $\mathbb{N}$ osservando che ad ogni sottoinsieme finito $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ di $\mathbb{N}$ si può associare il numero naturale che ha sviluppo binario avente "1" in posizione $n_1, n_2, \dots, n_k$. In altre parole, posso costruire l'applicazione

$$P_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\phi \longrightarrow 0$$
$$\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} 2^{n_i}$$

Es $(2,3,5) \to 101100_2 = 44$

Essa è chiaramente biiettiva, dunque $P_0(\mathbb{N})$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, cioè è numerabile.

~~Se una collezione [illegible]~~ In generale, dato un qualunque insieme X si ha che $P_0(X)$ ha la stessa cardinalità di X (lo vedremo in seguito). Questo non è più vero se si considera l'insieme $P(X)$, come mostra il seguente risultato dimostrato per primo da Cantor.

→

Teorema (Cantor)
Sia X un insieme non vuoto. Allora

$$\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(P(X))$$

Dimostrazione Ovviamente $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(P(X))$, dato che esiste un'applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow P(X) \\ x &\longrightarrow \{x\} \end{aligned}$$

Mostriamo ora che $\mathrm{Card}(X) \neq \mathrm{Card}(P(X))$, ora che non esiste nessuna applicazione biettiva fra X e $P(X)$. E' ovviamente sufficiente mostrare che non esiste nessuna applicazione suriettiva. Supponiamo per assurdo che esista

$$f : X \longrightarrow P(X)$$

suriettiva. Costruiamo ora il sottoinsieme

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

(ricordiamo che $f(x) \in P(X)$; dunque è un sottoinsieme di X, quindi ha senso chiedersi se x vi appartenga oppure no).
Poiché S è un sottoinsieme di X e $f : X \to P(X)$ è per ipotesi suriettiva, esiste $s \in X$ tale che

$$f(s) = S.$$

Ora vi sono due possibilità: $s \in S$ oppure $s \notin S$.
Se $s \in S$, dalla definizione di S segue $s \notin f(s) = S$, contraddizione.

Se invece $S \notin S$, dalla definizione segue $S \in f(S) = S$, di nuovo una contraddizione.
Questo conclude la dimostrazione ∎

Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione si può trovare ad esempio su [Manetti]:

Teorema (Cantor - Schröder - Bernstein)
Siano X, Y due insiemi. Allora

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$$

se e solo se esistono due applicazioni iniettive

$$f: X \longrightarrow Y, \quad g: Y \longrightarrow X$$

In altri termini $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$ se e solo se $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ e $\mathrm{Card}(Y) \leq \mathrm{Card}(X)$.

Notazione

Per ogni coppia di insiemi X, Y indicheremo con X^Y l'insieme di tutte le applicazioni

$$f: Y \longrightarrow X$$

Ad esempio, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indica l'insieme di tutte le applicazioni $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, ossia l'insieme di tutte le successioni a valori reali

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

In particolare, possiamo considerare l'insieme di tutte le applicazioni $f: X \longrightarrow \{0,1\}$, che

verrà indicato con $\{0,1\}^X$ o anche con 2^X, visto che la cardinalità di $\{0,1\}$ è la stessa di quella di un (qualsiasi) insieme con 2 elementi.

Osservazione. Si ha, per ogni insieme X:

$$\mathrm{Card}\,(2^X) = \mathrm{Card}\,(P(X))$$

Infatti esiste una biezione naturale

$$F: 2^X \longrightarrow P(X)$$

fra l'insieme delle applicazioni da X in $\{0,1\}$ e l'insieme delle parti di X. Tale biezione associa ad ogni applicazione $f: X \longrightarrow \{0,1\}$ il sottoinsieme $F(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$

(ovviamente si poteva anche associare il sottoinsieme delle x tale che $f(x) = 0$, ottenendo l'applicazione complementare).

Geometria 2 2014 - 2015

F Polizzi + (P. Sabatino)

Bibliografia: Kosniowski : Introduzione alla Topologia Algebrica
Manetti : Topologia
Checcucci - Tognoli - Vesentini : Lezioni di topologia generale
Sutherland : Introduction to Metric and Topological Spaces.
Armstrong: "Basic Topology", Munkres: "Topology".

Ricevimento: su appuntamento

Sito Facebook del Corso (importante iscriversi)

- Esame: Prova Scritta + Prova Orale (Unica)

Programma del corso: Introduzione alla Topologia Generale
con elementi di Topologia Algebrica

Sito Web personale del Docente:
https://sites.google.com/site/francescopolizzi

Esercitazioni Settimanali.

Principio di induzione

Il principio di induzione è uno strumento di dimostrazione che riguarda enunciati indicizzati da numeri naturali. Prima di trattare esplicitamente l'induzione, ricordiamo il

Principio del minimo intero (o del Buon ordinamento)
Ogni sottinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ possiede un elemento minimo.

Possiamo ora enunciare il

Principio di induzione
Sia $S(n)$ una famiglia di enunciati, indicizzati dagli interi $n \geq n_0$, dove n_0 è un intero (fissato) positivo.
Supponiamo che:
(i) $S(n_0)$ sia vero
(ii) $S(n)$ vero $\Rightarrow S(n+1)$ vero
Allora $S(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

] "effetto domino" sugli enunciati.

La (ii) è spesso chiamata "ipotesi induttiva".

Dim Sia ℓ l'insieme dei naturali $n \geq n_0$ tale che $S(n)$ è falso.
Se ℓ è vuoto, abbiamo finito (tutti gli enunciati sono veri).
Altrimenti, per il principio del buon ordinamento ℓ contiene un elemento minimo k.
Per (i) abbiamo $k > n_0$, dunque esiste un enunciato $S(k-1)$. D'altra parte, siccome per definizione

k è il minimo intero tale che $S(k)$ sia falso, segue che $S(k-1)$ è vera. Ma allora per (i i) abbiamo che $S(k)$ è vera, contraddizione. Dunque necessariamente $\mathcal{C} = \phi$ e la dimostrazione è conclusa ∎

Esempio di applicazione

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

- L'enunciato è vero per $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$$

- Mostriamo che se l'enunciato è vero per n allora è necessariamente vero per $n+1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

$$= \text{(ipotesi induttiva)} \quad \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[(n+2)(2n+3)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)$$

ossia l'enunciato è vero per $n+1$.

Allora usando il principio d'induzione matematica concludiamo che l'enunciato è vero $\forall\, n \geq 1$.

Completezza dei numeri reali.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Diremo che X è limitato superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \leq M \quad \text{per ogni } x \in X$$

Analogamente, diremo che X è limitato inferiormente se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$m \leq x \quad \text{per ogni } x \in X$$

Diremo che M e m sono una maggiorante e una minorante di X, rispettivamente.

Un elemento $s = \sup(X) \in \mathbb{R}$ viene detto estremo superiore di X se è il minimo dei suoi maggioranti, ossia se

(1) $x \leq s \quad \forall x \in X$

(2) Per ogni $\varepsilon > 0$ $s - \varepsilon$ non è maggiorante di X, ossia esiste $x \in X$ tale che $x \geq s - \varepsilon$.

Si verifica immediatamente che l'estremo superiore, se esiste, è unico.

Un elemento $i = \inf(X) \in \mathbb{R}$ viene detto estremo inferiore di X se è il massimo dei suoi minoranti, ossia se

(1) $x \geq i \quad \forall x \in X$

(2) Per ogni $\varepsilon > 0$ $s + \varepsilon$ non è minorante di X, ossia esiste $x \in X$ tale che $x \leq s + \varepsilon$

Anche $\inf(X)$, se esiste, è unico.

Oss Notiamo che, anche nel caso in cui esistano, non è detto che $\sup(X)$ e $\inf(X)$ appartengano ad X.

Nel caso in cui ciò accade, vengono detti massimo e minimo di X, indicati con $\max(X)$ e $\min(X)$, rispettivamente.

Esempi:

- $X = [0,1)$ $\quad \sup(X) = 1$, non è massimo; $\inf(X) = 0$, non è minimo
- $X = [0,1)$ $\quad \min(X) = 0, \quad \sup(X) = 1$
- $X = (0,1]$ $\quad \inf(X) = 0, \quad \max(X) = 1$
- $X = [0,1]$ $\quad \min(X) = 0, \quad \max(X) = 1$
- $X = (0, +\infty)$ $\quad \inf(X) = 0$, non esiste $\sup(X)$
- $X = [0, +\infty)$ $\quad \min(X) = 0$, non esiste $\sup(X)$
- $X = (-\infty, 0)$ $\quad$ non esiste $\inf(X)$, $\sup(X) = 0$
- $X = (-\infty, 0]$ $\quad$ non esiste $\inf(X)$, $\max(X) = 0$

Principio di completezza dei numeri reali.

Ogni sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ e limitato superiormente possiede estremo superiore.

Analogamente, ogni insieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ e limitato ~~superiormente~~ inferiormente possiede estremo inferiore.

Il principio di completezza è una proprietà caratterizzante dei numeri reali e, ad esempio, fallisce completamente in $\mathbb{Q}$. Ad esempio, la successione dei successivi troncamenti decimali di un numero razionale positivo (tipo $\sqrt{2}$) è un insieme limitato superiormente di $\mathbb{Q}$ ma senza estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Esempio - esercizio

Consideriamo la successione $\{c_n\}$ di numeri razionali definita come segue

$$c_1 = \frac{1}{1}, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad c_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \dots$$

$$c_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}}$$

Dimostrare che

(1) $c_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ dove gli F_n sono i numeri di Fibonacci definiti come segue:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3$$

cioè $F_1 = 1, \ F_2 = 1, \ F_3 = 2, \ F_4 = 3, \ F_5 = 5, \ F_6 = 8, \dots$

(2) La sottosuccessione c_{2k+1} è crescente e limitata superiormente.

(3) La sottosuccessione c_{2k} è decrescente e limitata inferiormente.

(4) $\sup(c_{2k+1}) = \inf(c_{2k}) = \lim_n c_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (numero aureo)

$$c_1 \ c_3 \ c_5 \ c_7 \dots \cdot \dots c_8 \ c_6 \ c_4 \ c_2$$

$$\varphi \cong 1{,}618\dots$$

Spazi metrici

Informalmente, uno spazio metrico X è un insieme su cui è definita una funzione distanza.

Definizione (DISTANZA)
Sia X un insieme. Una distanza (o metrica) su X è una funzione

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

(M1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$
(disuguaglianza triangolare)

Definizione (SPAZIO METRICO)
Uno spazio metrico (X,d) è una coppia dove X è un insieme e d è una metrica su X.

Esempio 1 Sia X un insieme qualsiasi. Allora su X possiamo definire la metrica discreta nel modo seguente

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

(X,d) è allora detto uno spazio metrico discreto

Esempio 2 Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la distanza euclidea

$$d(x,y) = |x-y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Allora $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

Esempio 3 La distanza euclidea in $\mathbb{R}$ può essere generalizzata alla distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ come segue

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

Allora $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Esempio 4 Sia $X = \mathbb{C}^n$. Allora come insieme posso identificare X con $\mathbb{R}^{2n}$, dato che ogni numero complesso $z_j = a_j + i\, b_j$ è identificato dalla sua parte reale e dalla sua parte immaginaria.
Posso definire la seguente metrica su $\mathbb{C}^n$:

$$d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(z,w) = \sqrt{|z_1-w_1|^2 + \dots + |z_n-w_n|^2}$$

$\forall\, z = (z_1, \dots, z_n),\ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.

E' immediato verificare che tale metrica corrisponde alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^{2n}$, pertanto la chiameremo la <u>metrica euclidea</u> su $\mathbb{C}^n$.

Esempio 5 Possiamo definire altre interessanti distanze su $\mathbb{R}^n$, ad esempio

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x,y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

Se chiamiamo $d(x,y)$ la distanza euclidea, abbiamo la catena di disuguaglianze

$$d_\infty(x,y) \underset{①}{\leq} d(x,y) \underset{②}{\leq} d_1(x,y) \underset{③}{\leq} n \cdot d_\infty(x,y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti:

① $d_\infty(x,y) = \max_i \{|x_i - y_i|\} \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} = d(x,y)$

② $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \Rightarrow d(x,y)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2$

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \Rightarrow d_1(x,y)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2$

$= d(x,y)^2$

③ $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n \cdot \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\} = n \cdot d_\infty(x,y)$

Esempio 6 Sia $X = \{$ funzioni continue $f: [a,b] \to \mathbb{R}\}$ dove $[a,b]$ è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Tale insieme si indica anche con $C[a,b]$. Per ogni $f, g \in C[a,b]$, definiamo

$$d_\infty(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

(Tale massimo esiste per il Teorema di Weierstrass, dato che $f(t) - g(t)$ è continua su $[a,b]$ che è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, e pertanto possiede massimo e minimo su $[a,b]$).

Allora d_∞ è una metrica su $C[a,b]$. Infatti

(M1) $\max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \geq 0 \quad \forall f, g \in C[a,b]$.

Inoltre se $\max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| = 0$, segue $f(t) - g(t) \equiv 0$,

cioè $f = g$.

(M2) $d_\infty(f,g) = \max_t |f(t) - g(t)| = \max_t |g(t) - f(t)| = d_\infty(g,f)$

(M3) Per disuguaglianza triangolare applicata all'usuale valore assoluto su $\mathbb{R}$ si ha

$$|f(t)-g(t)| = |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)|$$
$$\leq |f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)| \quad \text{da cui}$$

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left(|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|\right)$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-h(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |h(t)-g(t)|$$

cioè

$$d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) \quad \forall\, f,g,h \in C[a,b]$$

<u>Esempio</u> Sia d una metrica su X. Allora l'applicazione

$$\bar{d} : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{d}(x,y) = \min(1, d(x,y))$$

è ancora una metrica su X, detta <u>limitazione standard di d</u>. La verifica delle proprietà (M1) e (M2) è immediata, per cui resta solo da verificare la disuguaglianza triangolare (M3).

Siccome $\bar{d}(x,y) \leq 1 \ \forall x,y$, se $\bar{d}(x,z)+\bar{d}(z,y) \geq 1$ non c'è niente da dimostrare. Se invece

$$\bar{d}(x,z)+\bar{d}(z,y) < 1$$

allora $\bar{d}(x,z)<1$ e $\bar{d}(z,y)<1$, da cui

$$\bar{d}(x,z) = d(x,z) \quad \text{e} \quad \bar{d}(z,y) = d(z,y).$$

Segue

$$\bar{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leq d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) = \bar{d}(x,z)+\bar{d}(z,y)$$

Esempio 8 Considereremo di nuovo l'insieme $C[a,b]$ delle funzioni continue $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Abbiamo già dotato $C[a,b]$ della metrica d_∞. Mostriamo ora un altro esempio di metrica su tale spazio. Definiamo

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

Mostriamo che si tratta effettivamente di una metrica.

(M1) Chiaramente $d_1(f,g) \geq 0$ dato che la funzione integranda è non negativa. Se $d_1(f,g) = 0$, siccome $|f(t) - g(t)|$ è continua, si deve necessariamente avere $|f(t) - g(t)| \equiv 0$, ossia $f = g$.

(M2) La dimostrazione di $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ è immediata.

(M3) Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza triangolare. Siano $f, g, h \in C[a,b]$. Allora $\forall\, t \in [a,b]$ possiamo scrivere, per l'usuale disuguaglianza triangolare su $\mathbb{R}$:

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|$$

dunque, per monotonia e linearità dell'integrale:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \leq \int_a^b |f(t) - h(t)|\, dt + \int_a^b |h(t) - g(t)|\, dt$$

$$= d_1(f,h) + d_1(h,g).$$

Osservazione La metrica d_1 sullo spazio $C[a,b]$ può essere generalizzata come segue.
Per ogni intero $p \geq 1$ poniamo

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \right)^{1/p} \qquad f, g \in C[a,b].$$

Si dimostra che questa è una metrica (per $p=1$ otteniamo la metrica d_1 incontrata nell'esempio precedente).
Le proprietà (M1), (M2) si dimostrano come prima.
La proprietà (M3) (ossia la disuguaglianza triangolare) segue da alcuni strumenti un po' più sofisticati, ad esempio dalla Disuguaglianza di Hölder. A tal proposito, si rimanda ai testi di Analisi Funzionale.

Esempio 9 Sia X l'insieme delle successioni limitate a valori reali

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad |a_i| < M \quad \forall i.$$

Allora possiamo definire una norma su X, che chiamo d_∞, come segue:

$$d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

Si verifica facilmente che le proprietà (M1), (M2), (M3) sono soddisfatte. Tale spazio metrico è generalmente indicato con $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Esempio 10 Sia $\ell^1(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali che convergono in valore assoluto, cioè tali che

$a_1, \dots, a_n, \dots$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

Allora

$$d_1 : \ell^1(\mathbb{R}) \times \ell^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_1((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

è una metrica su $\ell^1(\mathbb{R})$.

Prima di tutto, dimostriamo che d_1 è ben definita, cioè che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$ converge. Questo è evidente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

Le proprietà (M1), (M2), (M3) sono ora immediate.

Esempio 11 Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \quad \text{converge.}$$

Ad esempio, la serie armonica $a_n = \frac{1}{n}$ appartiene ad $\ell^2(\mathbb{R})$ (ma non a $\ell^1(\mathbb{R})$!)

Definiamo

$$d_2 : \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_2((a_n),(b_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz sulle somme parziali si dimostra senza troppe difficoltà che questa è una metrica su $\ell^2(\mathbb{R})$ (data come esercizio guidato). Questa si può pensare come una generalizzazione "infinito-dimensionale" della metrica euclidea!

Più in generale, per ogni $p \geq 1$ consideriamo l'insieme $\ell^p(\mathbb{R})$ delle successioni reali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty$$

Allora si dimostra che la funzione

$$d_p : \ell^p(\mathbb{R}) \times \ell^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_p((a_n),(b_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \right)^{1/p}$$

è una metrica su $\ell^p(\mathbb{R})$.

Le proprietà (M1) e (M2) sono di verifica pressoché immediata. La disuguaglianza triangolare (M3) è invece più difficile da dimostrare. Essa segue da una generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nota come "disuguaglianza di Minkowski". Ancora una volta rimandiamo ai testi di Analisi Funzionale per i dettagli.

Definizione Sia (X,d) uno spazio metrico. Il sottoinsieme

$$B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \} \subset X$$

viene detta **palla aperta** di centro x e raggio r (rispetto alla distanza d).

Esempi

- Se (X,d) è uno spazio metrico discreto, allora per ogni $x \in X$ si ha

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } r \leq 1 \\ X & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

(Osserviamo che la scelta dei segni per $r=1$ è corretta. Infatti

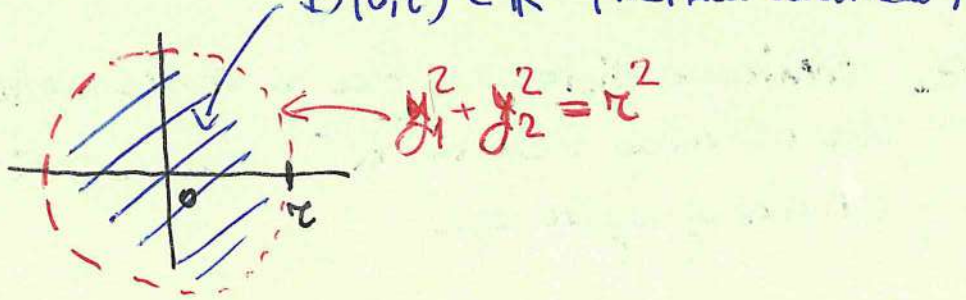
$$B(x,1) = \{ y \in X \mid d(x,y) < 1 \} = \{x\}$$

)

- Sia $X = \mathbb{R}^n$ e d la metrica euclidea. Allora se $x = (x_1, \dots, x_n)$ si ha

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y)^2 < r^2 \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 < r^2 \} \end{aligned}$$

che è una ipersfera aperta in $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio r. Il caso $n=2$, $x=(0,0)$ è mostrato in figura



- Analogamente possiamo considerare le palle aperte di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle metriche d_1 e d_∞. Si ha

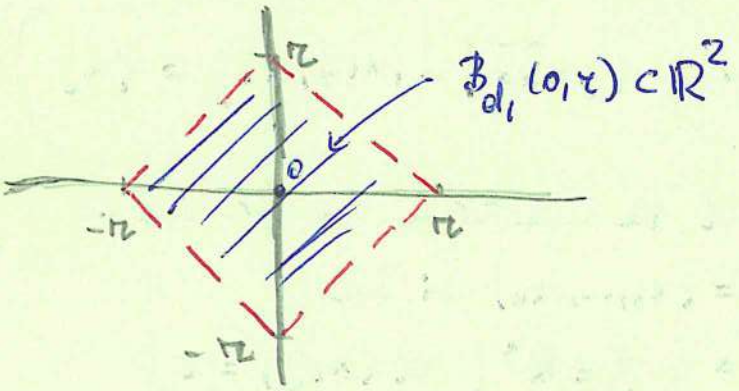
$$B_{d_1}(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < r \right\}$$

$$B_{d_\infty}(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\} < r \right\}$$

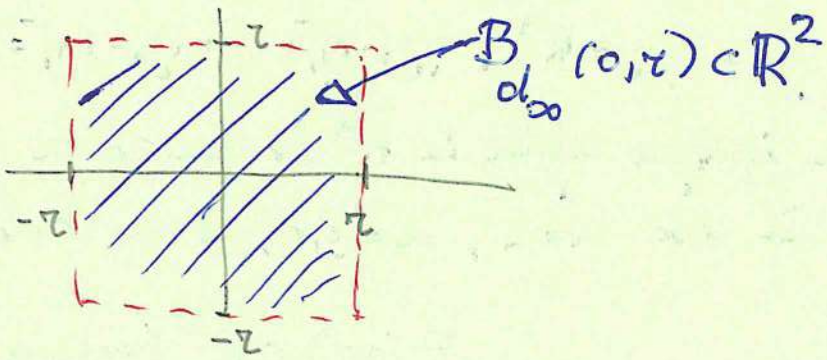
Il caso $n=2$, $x=0$ è mostrato in figura.

$$B_{d_1}(0,r) = \left\{ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2} |y_i| < r \right\}$$

$$= \{ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -r < |y_1| + |y_2| < r \}$$



$$B_{d_\infty}(0,r) = \{ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|y_1|,|y_2|\} < r \}$$

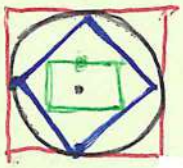


<u>Oss</u> Abbiamo visto che fra le varie distanze che abbiamo dato in $\mathbb{R}^n$ vale la catena di disuguaglianze

$$d_\infty(x,y) \le d(x,y) \le d_1(x,y) \le n \cdot d_\infty(x,y).$$

Passando alle rispettive palle aperte, questa si traduce in una catena di inclusioni

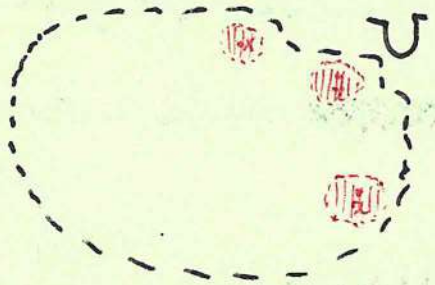
$$B_{d_\infty}(x, \tfrac{1}{n}r) \subseteq B_{d_1}(x,r) \subseteq B_d(x,r) \subseteq B_{d_\infty}(x,r)$$



Definizione (Insieme Aperto)
Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice <u>aperto</u> se per ogni $x \in U$ esiste $\varepsilon > 0$ (dipendente da x) tale che

$$B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

In altre parole, U è aperto se e solo se dato ogni suo punto esiste una palla centrata in x e di raggio sufficientemente piccolo tutta contenuta in U.



<u>Esempi</u>

- L'intervallo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ è aperto
- La semiretta $\{x > 0\} \subset \mathbb{R}$ è aperta
- Il sottoinsieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è aperto.
- Il semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ è aperto.
- Se X è uno spazio metrico e $x \in X$, la palla aperta

$$B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

è un insieme aperto.

Infatti, sia $y \in B(x,r)$
Voglio mostrare che esiste $\varepsilon > 0$
tale che $B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$.
Infatti, scelgo $\varepsilon < r - d(x,y)$
Allora se $z \in B(y,\varepsilon)$ ho:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r,$$

cioè $d(x,z) < r$. Questo mostra che $z \in B(x,r)$, ossia $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.

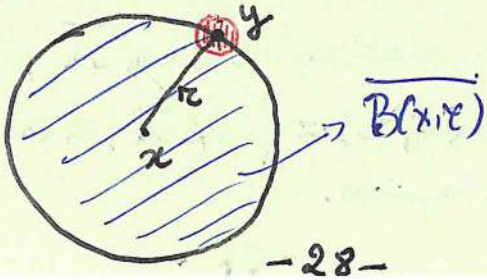
- Se (X,d) è uno spazio metrico discreto, allora ogni punto $x \in X$ è aperto — Infatti $B(x,1/2) = \{x\}$, cioè esiste una palla aperta formata dal solo $\{x\}$

- Se $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, allora un punto non è mai aperto. Infatti, se $x \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi palla euclidea (non importa quanto piccolo sia il raggio) centrata in x conterrà altri punti di $\mathbb{R}^n$

- La palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ (~~esempio~~ con la metrica euclidea)

$$\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) \leq r\}$$

non è aperta. Infatti preso un punto $y \in \overline{B(x,r)}$ tale che $d(x,y) = r$, ogni palla aperta centrata in y interseca il complementare di $\overline{B(x,r)}$, dunque non è tutta contenuta in $\overline{B(x,r)}$



In particolare, l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ non è aperto (mentre $[0,1)$ lo è). In generale, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ non è aperto (mentre (a,b) lo è).

Definizione (TOPOLOGIA INDOTTA DA UNA METRICA)
Sia (X,d) uno spazio metrico. Definiamo topologia di X indotta da d la famiglia dei sottoinsiemi aperti di X (rispetto alla metrica d).
In simboli scriviamo

$$\tau_X = \{U \subseteq X \mid U \text{ è aperto}\} \subset P(X)$$

Proposizione Sia (X,d) uno spazio metrico e τ_X la sua topologia. Allora
(i) $\emptyset \in \tau_X$, $X \in \tau_X$
(ii) l'intersezione di due elementi di τ_X appartiene ancora a τ_X
(iii) l'unione di una famiglia qualsiasi (finita o infinita) di elementi di τ_X è ancora un elemento di τ_X

Dimostrazione
(i) Banale
(ii) Siano $U_1, U_2 \in \tau_X$; vogliamo mostrare che $U_1 \cap U_2 \in \tau_X$. Sia $x \in U_1 \cap U_2$. Siccome U_1 e U_2 sono aperti, per definizione

di questo posso trovare $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tali che

$$B(x, \varepsilon_1) \subset U_1 \quad \text{e} \quad B(x, \varepsilon_2) \subset U_2 .$$

Allora, posto $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_1) \subset U_1 \\ B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_2) \subset U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$$

cioè $U_1 \cap U_2$ è aperto.

(iii) Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia arbitraria di sottoinsiemi aperti di X. Vogliamo mostrare che la loro unione

$$\bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{è ancora aperta.}$$

Infatti, sia $x \in \bigcup U_i$. Allora esiste $j \in I$ tale che $x \in U_j$. Dunque, essendo U_j aperto, posso trovare $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Ma questo vuol dire che

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i ,$$

cioè l'unione è un insieme aperto. ∎

Osservazione 1 La parte (ii) della Proposizione implica che l'intersezione finita di sottoinsiemi aperti di X è ancora un sottoinsieme aperto.
Infatti, dimostriamolo per induzione sul numero n di sottoinsiemi $U_1 \dots U_n$. Sappiamo che è vero per $n=2$. Supponiamo sia vero per $n-1$. Allora poiché

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n$$

segue che $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ è aperto in quanto intersezione di due aperti.

Osservazione 2 In generale, l'intersezione definita di insiemi aperti non è aperta. Ad esempio, consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla metrica euclidea (brevemente: topologia euclidea) e sia

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$$

Ciascuno di questi intervalli ~~aperti~~ è un aperto. Ora si ha

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

che non è aperto.

Osservazione 3 Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Allora ogni sottoinsieme $U \subset X$ è aperto, in altre parole

$$\tau_X = \mathcal{P}(X).$$

Infatti, posso scrivere U come unione dei suoi punti

$$U = \bigsqcup_{x \in U} \{x\}$$

Ma ~~nella topologia~~ nella metrica discreta ogni punto è aperto, dunque U è aperto in quanto unione di aperti.

Il concetto di aperto in uno spazio metrico ci permette di dare l'importante definizione di funzione continua. Cominciamo a dare il concetto locale di continuità in un punto.

Definizione (FUNZIONE CONTINUA)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Diciamo che una funzione $f: X \to Y$ è continua se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X. In simboli

f è continua $\iff \forall\, U \in \tau_Y$ si ha $f^{-1}(U) \in \tau_X$

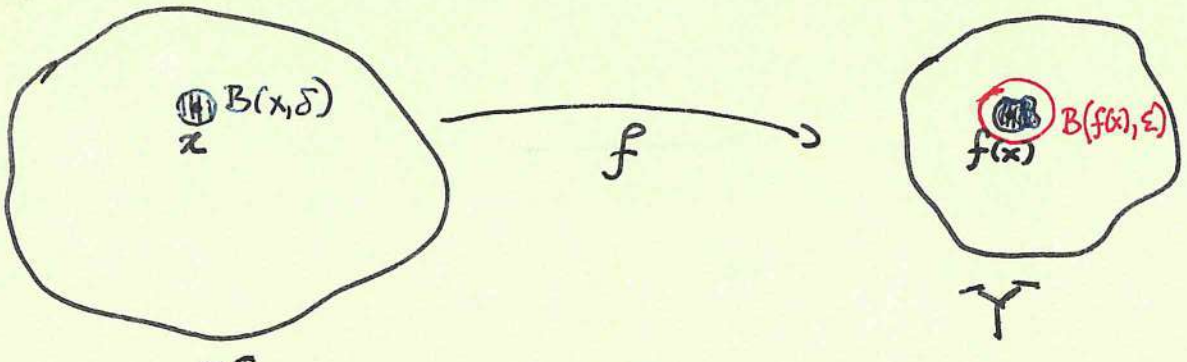
Definizione (Funzione Continua in un punto)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Diciamo che una funzione $f: X \to Y$ è continua in un punto $x_0 \in X$ se

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che $d_X(x_0, x) < \delta$ implica

$$d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

In altre parole, questo vuol dire che rendendo opportunamente piccola la distanza fra x_0 e x posso rendere piccola a piacere la distanza fra le immagini $f(x_0)$ e $f(x)$.



Osserviamo che questa condizione può essere riscritta come

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

Oss Se consideriamo $X = Y = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea, ritroviamo ovviamente la definizione di continuità a cui siamo abituati dal corso di Analisi 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x_0 - x| < \delta$ allora $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Una funzione $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ si dice continua se è continua in ogni punto di X. Siamo ora pronti a dare la definizione di continuità in termini di topologia.

Proposizione Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f: X \to Y$ è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.

In simboli

f è continua $\iff \forall U \in \tau_Y$ si ha $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

Dimostrazione

$\Rightarrow$ Supponiamo che $f: X \to Y$ sia continua e dimostriamo che la controimmagine di ogni aperto sia ancora un aperto. Sia dunque $U \subset Y$ aperto e sia $x \in f^{-1}(U)$. Siccome U è aperto, posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che

$$B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$$

D'altra parte, per ipotesi f è continua in ogni punto, in

particolare è continua in $x \in f^{-1}(U)$ e pertanto posso trovare $\delta > 0$ tale che

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$$

Applicando f^{-1} ottengo

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}f(B(x,\delta)) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$$

Questo mostra che $f^{-1}(U)$ è aperto in X.

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo che $f^{-1}(U)$ sia aperto in X per ogni U aperto in Y e mostriamo che questo implica che $f: X \longrightarrow Y$ è continua.

Sia dunque $x_0 \in X$ e consideriamo $B(f(x_0),\varepsilon) \subset Y$.

Per definizione $B(f(x_0),\varepsilon)$ è aperto in Y, dunque per ipotesi $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ è aperto in X.

Ovviamente $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$, dunque per definizione di aperto esiste $\delta > 0$ tale che

$$B(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$$

Applicando f ad ambo i membri otteniamo

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq f\left(f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))\right) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

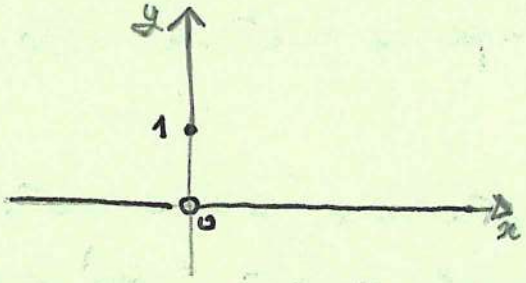
Questo mostra che f è continua nel punto $x_0 \in X$.

Ma x_0 era stato scelto arbitrariamente, dunque $f: X \longrightarrow Y$ è continua in ogni punto di X e la dimostrazione è conclusa. ∎

Esempio 1 Sia (X, d_X) uno spazio metrico discreto. Allora ogni funzione $f: X \longrightarrow Y$, dove (Y, d_Y) è uno spazio metrico qualsiasi, è continua.

Infatti sia U aperto in Y. Poiché $f^{-1}(U) \subset X$ e ogni sottoinsieme di X è aperto (perché X è discreto) segue che $f^{-1}(U)$ è aperto, dunque f è continua.

Esempio 2 Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



Infatti, consideriamo un aperto di $\mathbb{R}$ della forma $U = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Se $\varepsilon < 1$ allora $0 \notin U$, dunque $f^{-1}(U) = \{0\}$. Quindi $f^{-1}(U)$ non è aperto, ossia f non è continua.

Metriche equivalenti

Sia X un insieme e d, d' due metriche su X. Diremo che d e d' sono topologicamente equivalenti se esse inducono su X la stessa topologia, ossia se

U è aperto in X rispetto a d

$\Longleftrightarrow$

U è aperto in X rispetto a d'

Dalla definizione di aperto in uno spazio metrico, segue subito che

d e d' sono topologicamente equivalenti se e solo se

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste } \varepsilon' > 0 \text{ tale che } B_{d'}(x, \varepsilon') \subset B_d(x, \varepsilon) \\ \forall x \in X,\ \forall \varepsilon' > 0 \text{ esiste } \varepsilon > 0 \text{ tale che } B_d(x, \varepsilon) \subset B_{d'}(x, \varepsilon') \end{cases}$$

In altre parole, d e d' sono topologicamente equivalenti se e solo se ogni d-palla centrata in x contiene una d'-palla centrata nello stesso punto, e viceversa.

Non è sempre facile controllare se due metriche sono topologicamente equivalenti. A volte è più facile controllare una condizione un po' più forte.

Definizione
Due metriche d, d' su X sono dette Lipschitz-equivalenti se esistono due costanti $h, k > 0$ tali che

$$h\, d'(x,y) \leq d(x,y) \leq k\, d'(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

Questa è una relazione di equivalenza sull'insieme delle metriche su X.

Proposizione
Siano d, d' due metriche su X.
Se d e d' sono Lipschitz-equivalenti, allora sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione

- Sia $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Voglio mostrare che esiste $\varepsilon' > 0$ tale che
$$B_{d'}(x, \varepsilon') \subseteq B_d(x, \varepsilon)$$
Infatti prendo $\varepsilon' = \varepsilon / k$. Allora dalla condizione di Lipschitz segue che se $y \in B_{d'}(x, \varepsilon')$ si ha
$$d(x,y) \leq k\, d'(x,y) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon, \text{ cioè } y \in B_d(x, \varepsilon).$$
- Sia ora $x \in X$, $\varepsilon' > 0$. Voglio mostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che
$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_{d'}(x, \varepsilon')$$
Infatti prendo $\varepsilon = h\varepsilon'$. Allora dalla condizione di Lipschitz segue che se $y \in B_d(x, \varepsilon)$ si ha
$$d'(x,y) \leq 1/h\, d(x,y) < \frac{1}{h} \cdot \varepsilon = \frac{1}{h} h \varepsilon' = \varepsilon'$$
cioè $y \in B_{d'}(x, \varepsilon')$. Questo conclude la dimostrazione ∎

Corollario
Le metriche d, d_1, d_∞ introdotte su $\mathbb{R}^n$ sono a due a due topologicamente equivalenti.

Dimostrazione Abbiamo visto che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la catena di disuguaglianze:
$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y) \quad \text{da cui}$$
$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y) \leq n \cdot d(x,y) \leq n \cdot d_1(x,y)$$
Questo mostra che le tre metriche sono a due a due

Lipschitz equivalenti, dunque topologicamente equivalenti. ■

Oss 1| Il concetto di "metriche topologicamente equivalenti" è importante per quello che riguarda la continuità. Infatti, date due metriche topologicamente equivalenti su uno spazio X, le loro palle saranno differenti ma la famiglia di aperti che definiscono è la stessa.

In particolare, siccome la continuità può essere definita in termini puramente topologici ("la controimmagine di un insieme aperto è un insieme aperto") applicazioni continue rispetto ad una metrica d saranno continue anche rispetto ad ogni metrica topologicamente equivalente a d.

Ad esempio, data un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, non fa nessuna differenza verificare se essa è continua rispetto ad una qualsiasi delle tre metriche

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \text{metrica euclidea}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

dato che abbiamo dimostrato che esse sono a due a due Lipschitz equivalenti, dunque topologicamente equivalenti.
In ogni particolare situazione, possiamo scegliere di verificare la continuità rispetto alla metrica più comoda in quel contesto.

Oss 2 Non tutte le metriche su un insieme X sono topologicamente equivalenti. Ad esempio, consideriamo $X = \mathbb{R}^n$. Allora la metrica euclidea di non è topologicamente equivalente alla metrica discreta.
Infatti, abbiamo visto che un punto è aperto per la metrica discreta ma non per la metrica euclidea. Dunque le topologie definite dalle due metriche sono distinte, in particolare esse non possono essere topologicamente equivalenti

Un altro (e più interessante) esempio è il seguente.
Sia $X = C[a,b]$ con le due metriche

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

Affermo che d_1 e d_∞ non sono topologicamente equivalenti su $C[a,b]$
Più precisamente, voglio mostrare quanto segue
(1) $\forall f \in C[a,b]$ e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon' > 0$ tale che

$$B_{d_\infty}(f, \varepsilon') \subset B_{d_1}(f, \varepsilon)$$

(2) Il viceversa non vale (in un senso che chiarirò fra poco).

Cominciamo con (1). Siano $f, g \in C[a,b]$. Allora per definizione di d_∞ si ha

$|f(t)-g(t)| \leq d_\infty(f,g) \quad \forall\, t \in [a,b]$

dunque per le proprietà dell'integrale:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt \leq \int_a^b d_\infty(f,g)\,dt = (b-a)\,d_\infty(f,g),$$

in altre parole vale "una metà" della condizione di Lipschitz equivalenza, cioè

$$d_1(f,g) \leq (b-a)\,d_\infty(f,g)$$

Allora, ragionando come in una dimostrazione precedente, scelgo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Se $g \in B_{d_\infty}(f,\varepsilon')$ ne ha allora

$$d_1(f,g) \leq (b-a)\,d_\infty(f,g) < (b-a)\,\varepsilon' = (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

cioè $g \in B_{d_1}(f,\varepsilon)$. Quindi

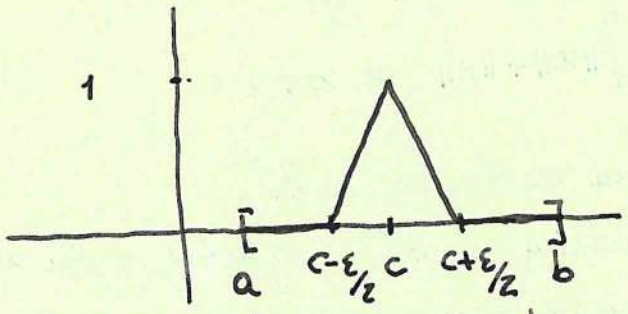
$$B_{d_\infty}(f,\varepsilon') \subseteq B_{d_1}(f,\varepsilon) \qquad \forall f \in C[a,b]$$

(2) Sia $\underline{0}$ la funzione costante nulla. Voglio mostrare che la palla $B_{d_\infty}(\underline{0},1)$ non è aperta rispetto alla topologia indotta da d_1. Siccome essa è aperta rispetto alla topologia indotta da d_∞, segue che le due topologie non sono uguali, dunque d_1 e d_∞ non sono topologicamente equivalenti (in particolare, la "seconda metà" della condizione di Lipschitz non può valere).

Supponiamo per assurdo che $B_{d_\infty}(\underline{0},1)$ sia aperta nella topologia indotta da d_1. Allora in particolare deve esistere $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_{d_1}(\underline{0},\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(0,1)$$

Ma questo non è possibile: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $f \in C[a,b]$ tale che $d_1(f, \underline{0}) < \varepsilon$ e $d_\infty(f, 0) = 1$: basta prendere una funzione fatta come segue



$$d_1(f, \underline{0}) = \int_a^b |f(t) - \underline{0}|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt = \frac{\varepsilon \cdot 1}{2} = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$$d_\infty(f, \underline{0}) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - 0| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| = 1$$

Allora $f \in B_{d_1}(\underline{0}, \varepsilon)$ ma $f \notin B_{d_\infty}(\underline{0}, 1)$.

Questo mostra che $B_{d_1}(\underline{0}, \varepsilon)$ <u>non</u> è contenuto in $B_{d_\infty}(\underline{0}, 1)$ per nessun valore di ε, cioè $B_{d_\infty}(\underline{0}, 1)$ è aperto nella topologia indotta da d_∞ ma non in quella indotta da d_1 –

Dunque d_1 e d_∞ <u>non</u> sono metriche equivalenti su $C[a,b]$.

Esempio La "post-office" metrica su $\mathbb{R}^2$

Sia $X = \mathbb{R}^2$ e definiamo la seguente funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \|x\| + \|y\| & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

dove $\|\cdot\|$ è l'usuale norma euclidea su $\mathbb{R}^2$.
Questa funzione è una metrica su $\mathbb{R}^2$. Infatti, resta solo da verificare la diseguaglianza triangolare: se x, y, z sono a due a due distinti:

$$d(x,z) + d(z,y) = \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| > \|x\| + \|y\| = d(x,y)$$

Come sono fatte le palle di questa metrica?

- Se $x = 0$, allora $B(0,r)$ è l'usuale palla di centro 0 e raggio r in $\mathbb{R}^2$.
- Se $x \neq 0$, abbiamo

$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < r - \|x\| \} \cup \{x\}$$

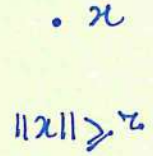
$$= \begin{cases} (\text{palla euclidea di centro } 0 \text{ e raggio } r - \|x\|) & \text{se } \|x\| < \frac{r}{2} \\ (\text{palla euclidea di centro } 0 \text{ e raggio } r - \|x\|) \cup \{x\} & \text{se } \frac{r}{2} \leq \|x\| < r \\ \{x\} & \text{se } \|x\| \geq r \end{cases}$$

$B(x,r)$

$\|x\| < \frac{r}{2}$

$B(x,r)$

$\frac{r}{2} \leq \|x\| < r$



$\|x\| \geq r$

In particolare, notiamo che ogni punto $x \neq 0$ è un punto isolato, cioè esiste una palla aperta fatta solo da lui!

In altre parole, ogni punto diverso da 0 è aperto (ma 0 non è aperto).

Questo mostra che tale metrica non è equivalente né alla metrica discreta (in cui tutti i punti sono aperti) né alla metrica euclidea (in cui nessun punto è aperto).

Questa metrica ha delle proprietà peculiari: ad esempio, è possibile trovare una palla di raggio 2 che contiene propriamente una di raggio 3. (vedi esercizi).

Spazi topologici

Il concetto di Spazio Topologico (cioè, di spazio dotato di una topologia) generalizza quello di spazio metrico con la topologia indotta dalla metrica.

Def (SPAZIO TOPOLOGICO)
Sia X un insieme. Una topologia su X è una famiglia τ di sottoinsiemi di X, detti aperti, che soddisfa le condizioni seguenti:

(T1) ϕ e X sono aperti
(T2) L'unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto
(T3) L'intersezione di due aperti è un sottoinsieme aperto.

La coppia (X, τ) è detta spazio topologico.

Osserviamo che la condizione (T3) implica, per induzione, che ogni intersezione finita di aperti è ancora un sottoinsieme aperto (mentre ciò non è vero, in generale, per un'intersezione infinita di essi).

Diamo ora alcuni esempi di spazio topologico.

Esempio 1 Sia X un insieme qualsiasi e prendiamo $\tau = \mathcal{P}(X)$, in altre parole diciamo che tutti i sottoinsiemi di X sono aperti. Questa è una topologia su X, detta topologia discreta

Esempio 2 Sia X un insieme qualsiasi e poniamo $\tau = \{\phi, X\}$ cioè richiediamo che gli unici aperti siano ϕ e X. Questa è una topologia su X, detta topologia banale

Esempio 3 Sia (X, d) uno spazio metrico.

Allora abbiamo visto che possiamo definire una topologia su X ponendo

$$U \subseteq X \text{ è aperto} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Equivalentemente:

$U \subseteq X$ è aperto $\iff$ U è unione di palle aperte (in genere, unione infinita).

Tale topologia è detta, come abbiamo, topologia indotta dalla metrica d. Se $X = \mathbb{R}^n$ e d è la distanza euclidea (o una qualsiasi distanza ad essa topologicamente equivalente) chiameremo la topologia indotta "TOPOLOGIA EUCLIDEA".

[Definizione Sia (X, τ) uno spazio topologico.
Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice chiuso se il suo complementare $X \setminus C$ è aperto.]

Ovviamente è possibile specificare la topologia dicendo quali sono i chiusi, invece degli aperti.

Osserviamo che dagli assiomi (T1), (T2), (T3) della topologia, utilizzando le Leggi di De Morgan ricaviamo le seguenti proprietà per la famiglia dei chiusi di uno spazio topologico.

(T1') ϕ e X sono chiusi

(T2') L'intersezione arbitraria di chiusi è un sottoinsieme chiuso

(T3') L'unione di due chiusi (e quindi di un numero finito di chiusi) è un insieme chiuso.

Esempio • Nella topologia discreta, ogni sottoinsieme è sia aperto che chiuso.

- Dato un qualsiasi spazio topologico X, il vuoto e X sono sia aperti che chiusi.
- Nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$:

  (a, b) è aperto

  $[a, b]$ è chiuso

  $[a, b)$ e $(a, b]$ non sono né aperti né chiusi.

  $(a, +\infty)$ e $(-\infty, a)$ sono aperti

  $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$ sono chiusi.

Esempio (Topologia Cofinita)
Sia X un insieme. La topologia cofinita su X è quella topologia i cui chiusi sono X, ϕ e gli insiemi finiti di punti. E' immediato verificare che le proprietà (T1'), (T2'), (T3') che definiscono una topologia tramite la famiglia dei chiusi sono verificate.

Esempio (Topologia della semicontinuità superiore)
E' la topologia che si ottiene su $\mathbb{R}$ prendendo come famiglia dei chiusi non vuoti tutti e soli i sottoinsiemi della forma

$[a, +\infty)$

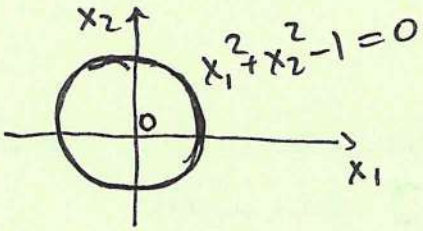
al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. È immediato verificare che $(T1')$, $(T2')$, $(T3')$ sono soddisfatte (Esercizio).

Esempio (Topologia di Zariski)

Questo esempio è molto importante in Geometria Algebrica. Sia $\mathbb{K}$ un campo (ad esempio, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e indichiamo con $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n coordinate a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, definiamo l'insieme affine associato ad f come

$$V(f) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Ad esempio, se consideriamo $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ e il polinomio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $V(f)$ è il cerchio unitario in $\mathbb{R}^2$



Analogamente, dato un ideale $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, possiamo definire la varietà affine associata a I come

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \ \forall f \in I\}$$

A priori, sembra che per definire una varietà affine sia necessario risolvere un sistema con infinite equazioni polinomiali (dato che l'ideale I contiene infiniti polinomi). Tuttavia, un importante risultato dovuto a D. Hilbert è noto come "Teorema della base" assicura che ogni ideale I in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è finitamente generato ($\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è quel che si dice un anello noetheriano), ossia $\exists\, f_1, \dots, f_k \in I$ tali che

$$I = (f_1, \dots, f_k)$$

Allora è immediato verificare che

$$V(I) = \left\{ (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \mid \begin{cases} f_1(a_1 \dots a_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(a_1 \dots a_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} V(f_i)$$

in altre parole ogni varietà affine di $\mathbb{K}^n$ è intersezione finita di ipersuperfici.

Definiamo <u>Topologia di Zariski</u> su $\mathbb{K}^n$ la topologia i cui chiusi sono tutte e sole le varietà affini, ovvero

$$\tau^{zar} = \{ V(I) \mid I \text{ ideale } \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Si verifica facilmente che τ^{zar} soddisfa tutte le proprietà (T1'), (T2'), (T3') che definiscono una topologia per mezzo dei suoi chiusi

(T1') : $V(1) = \emptyset$, $V(0) = \mathbb{K}^n$, dunque $\emptyset$ e $\mathbb{K}^n$ sono chiusi.

(T2') $\bigcap_k V(I_k) = V(\sum I_k)$ che è ancora una varietà affine dato che la somma qualsiasi di ideali di $\mathbb{K}[x_1 \dots x_n]$ è ancora un ideale.

(T3') $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$ che è ancora una varietà affine.

Osserviamo che se $n = 1$ allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ è semplicemente la topologia cofinita, dato che ogni polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$ ha al più un numero finito di zeri in $\mathbb{K}$.

Esiste una naturale relazione d'ordine fra le topologie definite su un insieme X:

Definizione Date due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su X, diremo che $\mathcal{T}_2$ è più fine di $\mathcal{T}_1$ (e di conseguenza che $\mathcal{T}_1$ è meno fine di $\mathcal{T}_2$) se ogni aperto di $\mathcal{T}_1$ è anche aperto di $\mathcal{T}_2$ [$\Leftrightarrow$ ogni chiuso di $\mathcal{T}_1$ è chiuso di $\mathcal{T}_2$]

Esempio 1 La topologia discreta è la topologia più fine che può essere definita su X. La topologia indiscreta è la meno fine possibile.

Esempio 2 La topologia euclidea su $\mathbb{R}$ è (un elemento) più fine sia della topologia cofinita che della topologia della semicontinuità superiore. Infatti i chiusi della topologia cofinita (insiemi finiti di punti) sono chiusi nella topologia euclidea, e i chiusi della topologia della semicontinuità superiore (cioè, le semirette ~~chiuse~~ della forma $[a, +\infty)$) sono chiusi anche nella topologia euclidea.

Viceversa, $[0,1]$ non è chiuso né nella topologia cofinita né in quella della semicontinuità superiore, ma è chiuso nella topologia euclidea.

Esempio 3 Può succedere che due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su X siano non confrontabili fra loro, nel senso che nessuna delle due è meno fine dell'altra. Ad esempio, la topologia cofinita e quella della semicontinuità superiore non sono fra loro confrontabili. Infatti

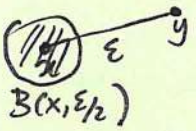
- Un punto è chiuso nella top. ~~discreta~~ cofinita ma non lo è nella topologia della semicontinuità superiore.
- $[1, +\infty)$ è chiuso nella topologia della semicontinuità superiore ma non nella topologia cofinita.

Definizione Sia (X, τ) uno spazio topologico. Diremo che (X, τ) è **metrizzabile** se esiste una metrica d su X tale che τ è la topologia indotta su X da d

Es. • Ogni spazio topologico discreto è metrizzabile
• $\mathbb{R}^n$ con la ~~[illegible]~~ topologia euclidea è metrizzabile.

↯ • Sia X un insieme con almeno due punti. Allora la topologia indiscreta su X **non** è metrizzabile.
Infatti, supponiamo per assurdo che la topologia indiscreta sia indotta da una metrica d, e siano x, y due punti distinti in X. Supponiamo che $d(x,y) = \varepsilon > 0$.
Allora $B(x, \varepsilon/2)$ è aperta.

Ma $x \in B(x, \varepsilon/2)$, $y \notin B(x, \varepsilon/2)$

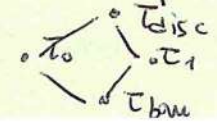


dunque $B(x, \varepsilon/2)$ è un aperto nella nostra topologia che contiene x ma non y.
Questo è assurdo, dato che la topologia indiscreta su X contiene solo due aperti: $\emptyset, X$.

Più avanti daremo esempi di topologie non metrizzabili che sono "più interessanti" della topologia indiscreta.

Osserviamo che questo blocco di esempi mostra che il concetto di "spazio topologico" è strettamente più generale di quello di "spazio metrico".

Esempio 4 (Spazio di Sierpinski) $X = \{0,1\}$, $\tau_0 = \{\emptyset, X, \{0\}\}$
Questo spazio non è metrizzabile, dato che $\{1\}$ non è chiuso.
Detta $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, si ha che τ_{disc}, τ_{ban}, τ_0, τ_1 sono le sole topologie su $\{0,1\}$. Il poset che descrive la relazione d'equivalenza "essere meno fine" è



(τ_0, τ_1 sono ovviamente non confrontabili)

- Basi di Aperti -

Definizione (BASE DI APERTI)
Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una sottofamiglia $\mathcal{B} \subset \tau$ si dice una *base* di τ se ogni aperto $A \in \tau$ può scriversi come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 1 Gli intervalli aperti (a,b) sono una base della topologia euclidea sulla retta reale

Esempio 2 Più in generale, le palle aperte in uno spazio metrico (X,d)

$$B(x, \varepsilon), \qquad x \in X, \ \varepsilon > 0$$

sono una base per la topologia τ_d indotta su X dalla metrica d.

Esempio 3 La *retta di Sorgenfrey* è definita come l'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia che ha come base di aperti la famiglia di tutti gli intervalli ~~aperti~~ semiaperti del tipo $[a,b)$
Osserviamo che

$$(a,b) = \bigcup_{c > a} [c,b)$$

cioè ogni aperto nella topologia euclidea è anche aperto nella topologia di Sorgenfrey - Ovviamente, $[a,b)$ è aperto nella topologia di Sorgenfrey ma *non* in quella euclidea.
Questo mostra che la topologia di Sorgenfrey è *strettamente più fine* della topologia euclidea.

Proposizione (Caratterizzazione delle basi di aperti)
Siano X un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e solo se:

1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

2) $\forall A, B \in \mathcal{B}$ e $\forall x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ con $x \in C \subseteq A \cap B$

Dim Esercizio

- Parte interna, chiusura, intorni -

Def Sia (X, τ) uno spazio topologico - ~~Excluderanno~~ Sia $B \subset X$. Allora

- ~~xxxxx~~ la <u>parte interna</u> di B, indicata con $\mathring{B}$, è l'unione di tutti gli aperti contenuti in B
- la <u>chiusura</u> di B, indicata con $\overline{B}$, è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono che contengono B.

Notiamo che

$$\mathring{B} \subseteq B \subseteq \overline{B}$$

infatti $\mathring{B}$ è il più grande aperto contenuto in B e $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso contenente B - Dunque

B è aperto $\iff B = \mathring{B}$

B è chiuso $\iff B = \overline{B}$

Oss. Si ha ovviamente $\partial B = \overline{B} \cap (X - \mathring{B})$, dunque ∂B è chiuso -

Def Si definisce <u>bordo o frontiera</u> di B l'insieme

$$\partial B := \overline{B} - \mathring{B}$$

I punti $x \in \mathring{B}$ vengono detti <u>punti interni</u> a B

I punti $x \in \overline{B}$ vengono detti <u>punti di aderenza</u> di B.

<u>Esempio 1</u> Sia X uno spazio topologico discreto.

Allora ogni $B \subset X$ è sia aperto che chiuso, pertanto

$$\mathring{B} = \overline{B} = B.$$

Allora $\partial B = \phi$

<u>Esempio 2</u> Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e sia $B = [0,1)$. Allora

$$\mathring{B} = (0,1), \quad \overline{B} = [0,1], \quad \partial B = [0,1] - (0,1) = \{0,1\}$$

Osserviamo che $0 \in B$, $1 \notin B$. Questo mostra che, in generale,

se $x \in \partial B$ si può avere sia $x \in B$ che $x \notin B$.

Esempio 3 Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Allora

$$\mathbb{Q}^\circ = \phi, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Infatti, osserviamo innanzitutto che ogni intervallo centrato in un punto razionale necessariamente contiene punti irrazionali, dunque $\mathbb{Q}$ non contiene nessun aperto di $\mathbb{R}$. Questo implica $\mathbb{Q}^\circ = \phi$.

Per mostrare che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, dobbiamo far vedere che non esiste un chiuso proprio C di $\mathbb{R}$ che contenga $\mathbb{Q}$. Per assurdo, supponiamo che tale chiuso esista. Allora $A = \mathbb{R} - C$ è un aperto proprio di $\mathbb{R}$ disgiunto da $\mathbb{Q}$; in particolare, se $a \in A$ allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} = \phi$. Ma questo è assurdo, dato che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ di lunghezza positiva contiene numeri razionali. Dunque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Si noti che questo implica

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}.$$

La stessa dimostrazione fa vedere che se $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea, allora

$$\mathbb{Q}^{n\,\circ} = \phi, \quad \overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n.$$

Esempio 4 Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e

$$Y = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

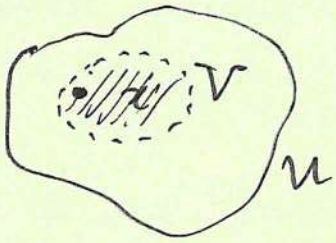
l'insieme dei numeri irrazionali. Allora, esattamente come nell'esempio 3:

$$Y^\circ = \phi, \quad \overline{Y} = \mathbb{R}.$$

Si osservi che l'esempio 3 e l'esempio 4 mostrano che $\mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}$.

Definizione (Intorno di un punto)
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice intorno di x se esiste un aperto V di X tale che

$$x \in V \subset U$$



Indichiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia degli intorni di x in X.
Si dimostrano facilmente i fatti seguenti (esercizio)

(1) Se $U_1 \in \mathcal{I}(x)$ e $U_1 \subset U_2$, allora $U_2 \in \mathcal{I}(x)$

(2) Se $U_1, U_2 \in \mathcal{I}(x)$ allora $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{I}(x)$

(3) U è aperto $\iff$ U è intorno di ogni suo punto.

(4) Se $Y \subseteq X$, $y \in \overline{Y} \iff \forall U \in \mathcal{I}(y)$, $U \cap Y \neq \emptyset$.

Definizione (Punto isolato - Punto di Accumulazione)
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme.
Diremo che un punto $x \in X \overline{\in}$

- un punto **isolato** di Y se esiste un intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ in X tale che $U \cap Y = \{x\}$ (in particolare $x \in Y$)
- un **punto di accumulazione** (o **punto limite**) di Y se **ogni** intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ contiene punti di Y diversi da x (in tal caso x può o meno appartenere all'insieme Y).

Esempio 1 $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $Y = \mathbb{Z}$.
Allora ogni punto $x \in \mathbb{Z}$ è isolato per $\mathbb{Z}$.
Non esistono punti di accumulazione per $\mathbb{Z}$.

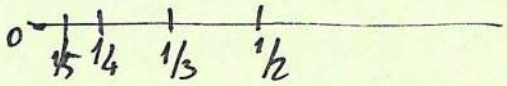
Esempio 2 $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Sia

$$Y = (0,1) \cup \{2\}$$

Allora i punti di accumulazione di Y sono i punti di $[0,1]$.
L'unico punto isolato è $\{2\}$. I punti $\{0,1\}$ sono i soli punti di accumulazione di Y non appartenenti a Y.

Esempio 3 $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Sia

$$Y = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



Allora ogni punto di Y è isolato.
Vi è esattamente un punto di accumulazione, che è $\{0\}$.

Esempio 3'
$X = \mathbb{R}$
$Y = \{a_n\}$
Se esiste una estratta a_{n_k} non definitivamente costante tale che $\lim a_{n_k} = l$, allora l è punto di accumulazione di $\{a_n\}$

Esempio 4 Sia X uno spazio topologico discreto, $Y \subseteq X$.
Allora ogni punto di Y è isolato, e non esistono punti di accumulazione. Infatti ogni $\{y\}$, $y \in Y$ è aperto nella topologia discreta, quindi ogni punto è intorno di se stesso.

Proposizione (Caratterizzazione della chiusura)
Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.
Allora

$$\overline{Y} = Y \cup \{\text{punti di accumulazione di } Y\}.$$

In particolare, Y è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dim. Dimostriamo dapprima che se y è d'accumulazione per Y allora $y \in \overline{Y}$. È equivalente dimostrare che se $y \notin \overline{Y}$ allora y non può essere d'accumulazione. Ma $y \notin \overline{Y}$ vuol dire che esiste un chiuso $C \subset X$ tale che $Y \subset C$ e $y \notin C$. Dunque $A = X - C$ è un aperto di X che contiene y, dunque un intorno di y tale che $A \cap Y = \phi$. Questo mostra che y non è d'accumulazione per Y, come volevo.

Allora ho dimostrato che

$$\{\text{punti d'accumulazione per } Y\} \subseteq \overline{Y}$$

Siccome $Y \subset \overline{Y}$ per definizione, segue

$$Y \cup \{\text{punti d'accumulazione per } Y\} \subseteq \overline{Y}$$

. Verifichiamo ora l'inclusione opposta, cioè

$$\overline{Y} \subseteq Y \cup \{\text{punti d'accumulazione per } Y\}.$$

Devo cioè mostrare che se $y \in \overline{Y}$ e $y \notin Y$, allora y è di accumulazione per Y. Se non lo fosse, esisterebbe un intorno $U \in I(y)$ tale che $U \cap Y = \phi$, dunque un aperto $V \ni y$ tale che $V \cap Y = \phi$.

Ma allora $Y \subseteq (X - V)$, dove $X - V$ è chiuso.

Ma $X - V$ non contiene y (dato che $y \in V$), e questo contraddice il fatto che $y \in \overline{Y}$. Questo conclude la dimostrazione ∎

Esempio Sia $X = \mathbb{R}$ con la top. euclidea

$$Y = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Allora $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$ dato che 0 è l'unico punto di accumulazione per Y.

Osserviamo che $\mathring{Y} = \phi$ (ogni punto di Y è isolato)

dunque

$$\partial Y = \overline{Y} = Y \cup \{0\}.$$

~~Definizione Uno spazio topologico si dice separabile~~
se con

Def (1) Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X si dice denso se $\overline{Y} = X$

(2) Uno spazio topologico X si dice separabile se contiene un sottoinsieme denso numerabile.

Es $\mathbb{R}$ è separabile ($\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso numerabile)
Più generalmente, $\mathbb{R}^n$ è separabile

Es In uno spazio con la topologia discreta nessun sottoinsieme proprio è denso.

Es In uno spazio con la topologia cofinita ogni sottoinsieme infinito è denso, dato che tutti i chiusi propri sono formati da un numero finito di punti.

Es $\mathbb{R}$ con la topologia discreta non è separabile, Infatti se $X \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme numerabile, si ha $\overline{X} = X \neq \mathbb{R}$ (dato che $\mathbb{R}$ è non numerabile).

Applicazioni continue

Definizione Un'applicazione $f: X \to Y$ fra due spazi topologici si dice **continua** se, dato un aperto $A \subseteq Y$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta in X.

Ricordiamo che

(1) $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$

(2) $f^{-1}\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup f^{-1}(A_i)$

Da (1) segue che:

$f: X \to Y$ è continua se e solo se, dato un chiuso $C \subset Y$, la controimmagine $f^{-1}(C)$ è chiusa in X.

Da (2) segue che, se $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di Y, allora $f: X \to Y$ è continua se e solo se $f^{-1}(B)$ è aperto per ogni $B \in \mathcal{B}$.

Proposizione Sia $f: X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni sottoinsieme A di X.

Dim $\Rightarrow$ Supponiamo f continua. Allora, siccome $\overline{f(A)}$ è un chiuso che contiene $f(A)$, segue che $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso che contiene A. Ma allora $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, cioè $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

[$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$]

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni $A \subset X$. In particolare, per ogni C chiuso in Y (ponendo $A = f^{-1}(C)$)

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C,$$

e dunque $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$.

D'altra parte ovviamente

$$f^{-1}(C) \subseteq \overline{f^{-1}(C)},$$

dunque $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$ e ciò vuol dire che $f^{-1}(C)$ è chiuso. Siccome C era un qualsiasi chiuso in Y, la dimostrazione è conclusa ∎

Esempio La funzione di Dirichlet

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua - Infatti usiamo la proposizione precedente con $A = \mathbb{Q}$. Si ha, siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$:

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) = f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}, \text{ mentre}$$

$$\overline{f(\mathbb{Q})} = \overline{\{1\}} = \{1\}$$

dunque $f(\overline{\mathbb{Q}}) \not\subseteq \overline{f(\mathbb{Q})}$.

Proposizione (COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE)
Siano X, Y, Z spazi topologici e

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$$

funzioni continue. Allora $g \circ f : X \to Z$ è una funzione continua -

Dim Sia $A \subset Z$ un aperto. Dalla continuità di g segue che $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, e dalla continuità di f segue che $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è aperto in X - Ma

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A),$$

per cui $(g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto e ciò prova la continuità di $g \circ f$ ∎

Definizione (Continuità in un punto)
Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione fra spazi topologici.
Diremo che f è <u>continua</u> nel punto $x \in X$ se per ogni intorno U di $f(x)$ esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$.

Proposizione $f: X \longrightarrow Y$ è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Dim $\Rightarrow$ Supponiamo che f sia continua e mostriamo che è continua per ogni $x \in X$. Sia U un intorno di $f(x)$.
Allora per definizione di intorno esiste $A \subset Y$ aperto con $f(x) \in A \subseteq U$. Allora $V = f^{-1}(A)$ è aperto in X (continuità di f) e contiene x, dunque è un intorno di X tale che $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$,
cioè f è continua in x.

$\Leftarrow$ Supponiamo viceversa che f sia continua in ogni punto $x \in X$ e dimostriamo che f è continua.
Sia A un aperto di Y, e sia $x \in f^{-1}(A)$.
Allora $f(x) \in A$, dunque A è intorno di $f(x)$ e per continuità di f in x posso trovare un intorno V di x tale che $f(V) \subseteq A$.
Ciò equivale a dire $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$, dunque $f^{-1}(A)$ è a sua volta intorno di x. Poiché x è arbitrario, $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto e pertanto è aperto ∎

Esempio 1 Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione costante. Allora essa è continua, qualunque siano le topologie su X e Y. Infatti, supponiamo $\mathrm{Im} f = y \in Y$. Allora se $A \subseteq Y$ è aperto, si ha

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{se } y \in A \\ \phi & \text{se } y \notin A \end{cases}$$

In ogni caso $f^{-1}(A)$ è aperto in X, dunque f è continua.

Esempio 2 Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione, dove X è uno spazio topologico discreto. Allora f è continua, in quanto $f^{-1}(A)$ è aperto qualunque sia A aperto in Y, dato che ogni sottoinsieme in uno spazio topologico discreto è aperto.

Esempio 3 Siano τ_1, τ_2 due topologie sull'insieme X. Allora l'applicazione identica

$$\begin{aligned} id: (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_2) \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

è continua se e solo se τ_1 è più fine di τ_2.

Infatti

$$\begin{array}{c} id \text{ è continua} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall A \text{ aperto in } \tau_2,\ id^{-1}(A) \text{ è aperto in } \tau_1 \\ \| \\ A \\ \Longleftrightarrow \\ \tau_2 \subseteq \tau_1, \text{ cioè } \tau_1 \text{ è più fine di } \tau_2. \end{array}$$

Esempio 4 $f: (X, \tau_0) \to (X, \tau_1)$ $\quad X = \{0,1\}$ $\quad \tau_0 = \{X, \phi, \{0\}\}$, $\tau_1 = \{X, \phi, \{1\}\}$

data da $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ è un omeomorfismo. Infatti è chiaramente continua e inoltre $f^{-1} = f$

Def Sia $f: X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici. Diremo che f è

- un'<u>applicazione aperta</u>, se $f(A)$ è aperto in Y per ogni A aperto in X
- un'<u>applicazione chiusa</u>, se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni C chiuso in X

Oss Una funzione continua in generale non è né aperta né chiusa.

ES 1 Una funzione costante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, ma non è aperta.

ES 2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ è continua ma non è aperta, dato che $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ non è aperto.

ES 3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ è continua ma non è chiusa, dato che $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$ non è chiuso.

Definizione (OMEOMORFISMO)

- Un'applicazione continua e biettiva $f: X \to Y$ si dice <u>omeomorfismo</u> se anche $f^{-1}: Y \to X$ è continua.
- Se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo, allora i due spazi topologici X e Y si dicono <u>omeomorfi</u>. Questa è una relazione d'equivalenza nella categoria degli spazi topologici.

Esempio Siano X, Y due spazi topologici discreti. Allora X e Y sono omeomorfi se e solo se

$$\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$$

Infatti, due spazi omeomorfi necessariamente hanno la stessa cardinalità, dato che ogni omeomorfismo è per definizione una bigezione.

Viceversa, supponiamo che X e Y abbiano la stessa cardinalità e sia $f: X \to Y$ una bigezione, $f^{-1}: Y \to X$ la funzione inversa. Siccome X è discreto, f è continua e siccome Y è discreto, f^{-1} è continua. Dunque f è un omeomorfismo.

Vedremo più avanti esempi più interessanti di omeomorfismi.

Proposizione Sia $f: X \to Y$ una applicazione continua fra spazi topologici. Allora sono equivalenti:
(1) f è un omeomorfismo
(2) f è chiusa e biettiva
(3) f è aperta e biettiva.

Dim

(1) $\Rightarrow$ (2) Se f è un omeomorfismo, per definizione f è biettiva. Sia C un chiuso X. Siccome f è biettiva,

$$f(C) = (f^{-1})^{-1}(C)$$

Essendo C chiuso e f^{-1} continua, segue che $f(C)$ è chiuso.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia $A \subseteq X$ un aperto e poniamo $C = X - A$.

Allora $f(A) = f(X - C) = Y - f(C)$ (si sfrutta la biettività).

Siccome f è chiusa, $f(C)$ è chiuso in Y. Dunque $f(A)$ è aperto, cioè f è aperta.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supponiamo che f sia biettiva e aperta, e consideriamo

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X.$$

Sia $A \subseteq X$ aperto. Allora

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

è aperto, dunque f^{-1} è continua ∎

Oss. Siccome $C \cap Y - (V \cap Y) = (X - V) \cap Y$, segue che C è chiuso nella topologia indotta da Y se e solo se esiste un chiuso D di X tale che $C = D \cap Y$

Sottospazi e Topologia indotta

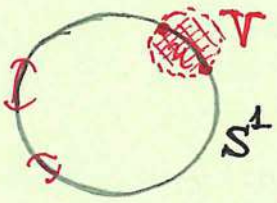
Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Possiamo dotare Y della cosiddetta topologia indotta, che è definita come segue:

$U \subset Y$ è aperto $\iff$ Esiste V aperto di X tale che $V \cap Y = U$

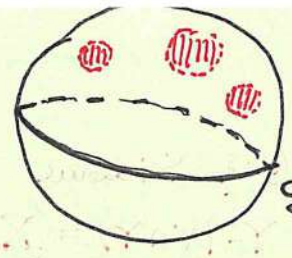
Gli aperti nella topologia indotta sono dunque le "tracce" degli aperti di X su Y. E' immediato verificare che in tal modo si ha una topologia su Y, detta topologia indotta o topologia di sottospazio.

Esempio 1

- $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea
  $Y = S^1$ = cerchio unitario $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$
  Una base per la topologia indotta su S^1 sono gli "archi di circonferenza aperti, cioè privi degli estremi.



- Analogamente, possiamo considerare $X = \mathbb{R}^3$ e $Y = S^2$ = sfera unitaria $(x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0)$. Una base per la topologia indotta su S^2 sono le "tracce" delle sfere aperte di $\mathbb{R}^3$ su S^2



Esempio 2 Sia (X,d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$.
Allora la restrizione di d a $Y \times Y$ induce una struttura di spazio metrico su Y la cui topologia indotta coincide con quella di sottospazio topologico.

Esempio 3 Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice discreto se la topologia indotta su Y è quella discreta.
Ad esempio, $\mathbb{Z}$ è discreto in $\mathbb{R}$ (si noti che la metrica indotta su $\mathbb{Z}$ non è la metrica discreta, ma la topologia corrispondente è quella discreta), mentre $\mathbb{Q}$ non è discreto in $\mathbb{R}$.
Si noti che se Y è discreto, non è detto che $\overline{Y}$ sia anche discreto. Inoltre, un sottoinsieme discreto di X può non essere chiuso (per entrambe le affermazioni, basta considerare il sottospazio $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{R}$).
Infine, notiamo che se X è uno spazio metrico discreto allora ogni suo sottospazio è anche discreto. Infatti, se $y \in Y$ si ha che y è aperto in X (X è discreto) dunque

$$y = \{y\} \cap Y \quad \text{è aperto anche in } Y.$$

[Proposizione La topologia indotta su Y è la meno fine tra le topologie su Y che rendono la mappa di inclusione

$$i : Y \hookrightarrow X$$

continua.]

Sia V un aperto di X. Allora $i^{-1}(V) = V \cap Y$.
Pertanto affinché i sia continua è necessario che $V \cap Y$ sia aperto in Y per ogni V aperto in X. ∎

Proposizione Sia X uno spazio topologico, Z un'altro spazio topologico e $f : X \longrightarrow Z$ un'applicazione continua. Allora la restrizione $f_{|Y} : Y \longrightarrow Z$ è anch'essa continua per ogni sottospazio $Y \subseteq X$.

Oss ↓
Il viceversa non vale! Se $f_{|Y}$ è cont non è detto che f sia continua.
Es: La restrizione della funzione di Dirichlet di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ è costante!

Dim Per definizione, un sottospazio è munito della topologia indotta. Sappiamo allora che l'inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ è una funzione continua. Ora, basta osservare che

$$f_{|Y} = f \circ i$$

e che la composizione di funzioni continue è una funzione continua. ∎

Proposizione (CHIUSURA NELLA TOPOLOGIA INDOTTA)
Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico X e $A \subseteq Y$. Allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.
In simboli, indicando con $\overline{A}^Y$ la chiusura di A in Y:

$$\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$$

Dim Per definizione di topologia indotta, si ha

$$\overline{A}^Y = \bigcap_{\substack{\text{chiusi } C \text{ di } Y \\ \text{con } A \subseteq C}} C = \bigcap_{\substack{\text{chiusi } D \text{ di } X, \\ \text{con } A \subseteq D}} (Y \cap D) = Y \cap \left(\bigcap_{\substack{\text{chiusi} \\ D \text{ di } X, \\ A \subseteq D}} D \right)$$

$$= Y \cap \overline{A}$$ ∎

Esempio Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea,
$Y = (0,1)$ e $A = (0,1) \cap \mathbb{Q} \subset Y$.

Allora la chiusura di A in Y è data da

$$\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}^X = (0,1) \cap [0,1] = (0,1)$$

cioè A è denso in Y.

Altri esempi di topologia indotta

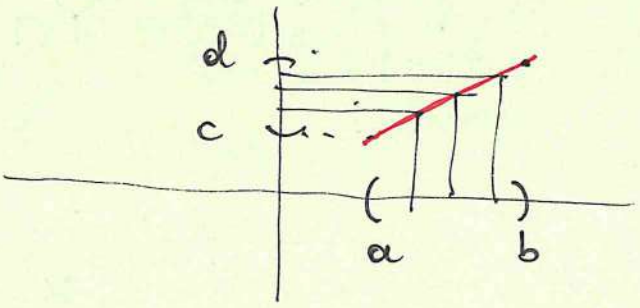
Esempio 1 Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea,
$Y = [a,b]$.

Allora una base di aperti per la topologia indotta su Y è data dagli insiemi del tipo seguente:

$[a,c)$	$c < b$
$(d,b]$	$a < d$
(d,c)	$a \leq d < c \leq b$

Notare che un sottoinsieme aperto in $[a,b]$ non è necessariamente aperto in $\mathbb{R}$.

Esempio 2 Due intervalli aperti (a,b), (c,d) di $\mathbb{R}$ sono fra loro omeomorfi (quando considerati con la topologia indotta). Infatti esiste un omeomorfismo che è una funzione lineare



Esplicitamente, tale funzione si scrive come

$$f: (a,b) \longrightarrow (c,d)$$

$$f(x) = c + \frac{(d-c)(x-a)}{(b-a)}$$

La stessa funzione fornisce un omeomorfismo fra $[a,b]$ e $[c,d]$. Vedremo più in là che (a,b) non è omeomorfo né a $[a,b)$ né a $[a,b]$ (servono i concetti di connessione e compattezza).

Esempio 3 Ogni intervallo aperto della forma (a,b) con la top. indotta è omeomorfo a $\mathbb{R}$. Per quanto visto nell'esempio precedente, basta mostrarlo per un intervallo speciale, ad esempio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Questo è chiaramente omeomorfo a $\mathbb{R}$ tramite la funzione tangente, che è una biezione continua

$$tg: (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

con inversa continua

$$\arctg: \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

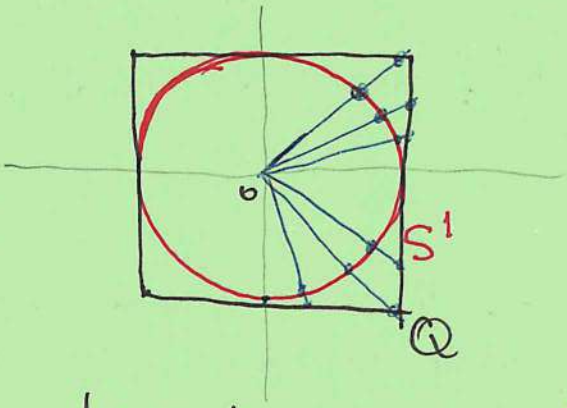
Esempio 4 Ogni intervallo aperto della forma (a,b) è anche omeomorfo ad una semiretta della forma $(c, +\infty)$.
Per gli esempi precedenti (dato che due semirette aperte $(c,+\infty)$ e $(d,+\infty)$ sono chiaramente omeomorfe) basta mostrare che $(0,+\infty)$ e $\mathbb{R}$ sono omeomorfi. Questo è infatti vero, l'omeomorfismo essendo dato tramite la funzione esponenziale, che è una biezione continua

$$e^x: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$$

con inversa continua $\ln: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

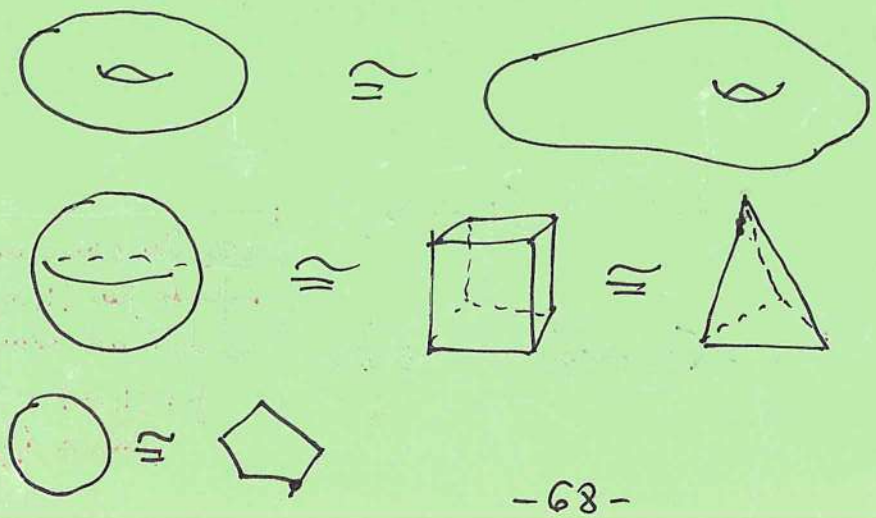
Oss Un omeomorfismo esplicito fra $(1,\infty)$ e $(0,1)$ è dato ad esempio da
$f: (1,\infty) \longrightarrow (0,1)$
$f(x) = 1/x$

Esempio 5 In $\mathbb{R}^2$, consideriamo una circonferenza e un quadrato con la topologia indotta. Allora essi sono omeomorfi. Siccome ogni omotetia è chiaramente un omomorfismo, basta dimostrarlo considerando $S^1 = \{x^2+y^2=1\}$ e il quadrato Q ad esso circoscritto.



Come omeomorfismo possiamo considerare la "proiezione" dal centro o degli assi coordinati, che "schiaccia" S^1 sul quadrato Q. La funzione inversa, viceversa, "curva" il quadrato fino a farlo diventare una circonferenza.

A livello intuitivo, due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con la topologia naturale sono da considerarsi omeomorfi se è possibile "torcere", "piegare", "allungare", "comprimere" o in generale "trasformare con continuità senza tagli né strappi" uno dei due nell'altro fino a trasformarlo nell'altro:



Esempio 6 (PROIEZIONE STEREOGRAFICA)

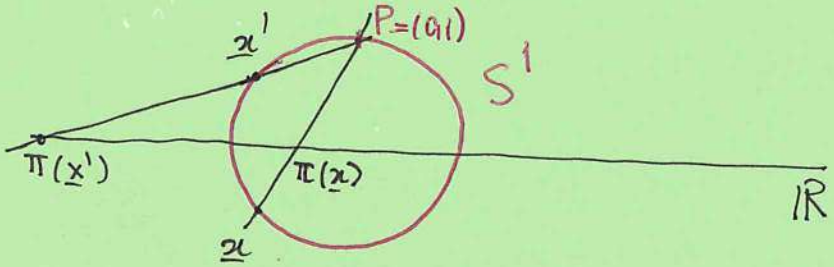
Sia $S^1 = \{x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio unitario. Voglio mostrare che se $p \in S^1$, allora $S^1 - \{p\} \cong \mathbb{R}$ (con la topologia usuale)

Senza ledere la generalità, posso supporre che $p=(0,1)$. Allora posso considerare la cosiddetta proiezione stereografica

$$\pi : S^1 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R} = \{y=0\}$$

definita come

$$\pi(\underline{x}) = (\text{retta } \underline{x}p) \cap \{y=0\}$$



Possiamo scrivere questa mappa in coordinate come segue.

Sia $\underline{x} = (x_1, y_1)$. Allora la retta px ha equazione

$$y-1 = \frac{y_1-1}{x_1-0}(x-0), \text{ ossia}$$

$$(1-y_1)x + x_1 y - x_1 = 0.$$

Intersecando con la retta $\{y=0\}$ troviamo il punto $\left(\frac{x_1}{1-y_1}, 0\right)$ ossia la mappa

$$\pi : S^1 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\pi((x_1,y_1)) = \frac{x_1}{1-y_1}$$

è data da

Oss./Esercizio: Se $(x_1,y_1) = e^{i\theta}$ allora $\pi(e^{i\theta}) = \tan(\theta/2 + \pi/4)$

Questa mappa è ben definita: infatti l'unico punto di S^1 con $y_1 = 1$ è il punto $(0,1)$, che abbiamo tolto.

Si tratta chiaramente di una mappa bigettiva. Per mostrare che è un ~~xxx~~ omeomorfismo, bisogna mostrare che l'inversa è anche continua.

Cerchiamo allora l'espressione della funzione inversa

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 - \{P\}$$

Dato $x \in \mathbb{R}$, cerchiamo $(x_1, y_1) \in S^1 - \{P\}$ in modo che $\pi(x_1, y_1) = x$

cioè $\dfrac{x_1}{1-y_1} = x$, ovvero

$$x_1 = x(1-y_1).$$

Poiché $(x_1, y_1) \in S^1$, $x_1^2 + y_1^2 = 1$, ossia sostituendo

$$[x(1-y_1)]^2 + y_1^2 = 1$$

$$x^2(y_1^2 - 2y_1 + 1) + y_1^2 - 1 = 0$$

$$(x^2+1)y_1^2 - 2x^2 y_1 + x^2 - 1 = 0$$

Risolvendo otteniamo le due soluzioni $y_1 = 1$, $y_1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

La prima va scartata, poiché corrisponde a $P = (0,1)$.

Dunque $y_1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, da cui $x_1 = x\left[1 - \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right] = \dfrac{2x}{x^2+1}$

cioè

$$\pi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 - \{P\} \quad \text{è data da}$$

$$\pi^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Legame con le terne pitagoriche: $(2x)^2 + (x^2-1)^2 = (x^2+1)^2$ terne pit se $x \in \mathbb{N}$

che è chiaramente una funzione continua tale che $x^2+1 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esercizio Dimostrare che esiste un omeomorfismo

$$\pi : S^2 - \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad P = (0,0,1)$$

dato per proiezione stereografica su $\mathbb{R}^2 = \{\text{piano } z = 0\}$.

L'espressione analitica di π e π^{-1} è:

$$\pi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$$\pi^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

Esempio Sia $S^n = \{ x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Scrivere l'espressione esplicita della proiezione stereografica

$$\pi : S^n - \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^n = \{\text{iperpiano } x_{n+1} = 0\} \qquad P = (0, 0, \dots, 1)$$

e mostrare che è un omeomorfismo, determinando anche l'espressione analitica di

$$\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{P\}.$$

Oss Abbiamo mostrato che

$$S^n - \{P\} \text{ è omeomorfo a } \mathbb{R}^n$$

per ogni $n \geq 1$. Quando avremo il concetto di compattezza, dimostreremo che S^n non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per nessun valore di n.

Esempio di funzione biettiva e continua che non è un omeomorfismo (dunque, tale che l'inversa non è continua)

Il seguente esempio si può trovare in Checcucci, Tognoli, Vesentini, "Lezioni di Topologia Generale", Esercizio 15 p. 89.

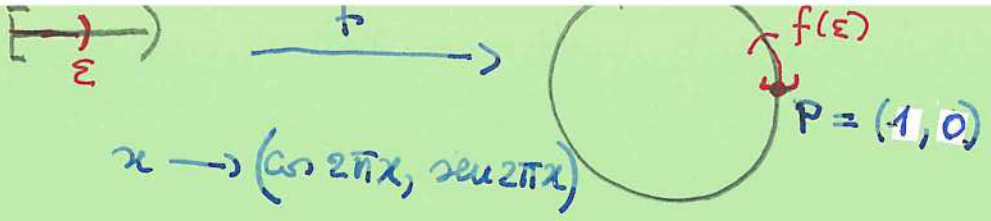
Considerciamo la funzione

$$f : [0,1) \longrightarrow S^1$$
$$f(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

- La funzione f è continua, essendo la restrizione dell'omeomorfismo locale $g : \mathbb{R} \to S^1$, $g(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ all'intervallo $[0,1)$.
- La funzione f è iniettiva - Infatti
$(\cos 2\pi x_1, \operatorname{sen} 2\pi x_1) = (\cos 2\pi x_2, \operatorname{sen} 2\pi x_2)$
implica $2\pi x_1 = 2\pi x_2 + 2k\pi \Rightarrow x_1 = x_2 + k$ con $k \in \mathbb{Z}$
dunque essendo $x_1, x_2 \in [0,1)$ si deve avere necessariamente $k = 0$, ossia $x_1 = x_2$
- La funzione f è suriettiva - Infatti ogni punto $z \in S^1$ può scriversi come $z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $0 \le \theta < 2\pi$, dunque posto $x = \frac{\theta}{2\pi}$ si ha $0 \le x < 1$ e $f(x) = z$.

Resta da dimostrare che $f^{-1} : S^1 \longrightarrow [0,1)$ non è continua. A tale scopo, scegliamo $\varepsilon << 1$ e consideriamo $(f^{-1})^{-1}(U_\varepsilon)$, dove $U_\varepsilon = [0, \varepsilon)$ è aperto nella topologia di $[0,1)$.

Allora $(f^{-1})^{-1}(U_\varepsilon) = f(U_\varepsilon)$ che è un piccolo arco di cerchio che parte da $p = (1,0)$ e contiene p: ma allora questo non è aperto in S^1, dunque f^{-1} non è continua (in altre parole, abbiamo mostrato che $f : [0,1) \longrightarrow S^1$ non è un'applicazione aperta).



Osservazione Quando avremo il concetto di compattezza sarà facile dimostrare che f non può essere un omeomorfismo: infatti S^1 è compatto (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$) mentre $[0,1)$ non lo è.

Topologia Prodotto

Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici.

Definiamo topologia prodotto su $X \times Y$ la topologia una cui base è data dalle sottoinsiemi del tipo

$$U \times V, \text{ dove } U \in \tau_X \text{ e } V \in \tau_Y$$

Ricordiamo che al prodotto cartesiano sono associate due funzioni suriettive

$$\pi_X : X \times Y \to X \qquad \pi_Y : X \times Y \to Y$$
$$(x, y) \to x \qquad (x, y) \to y$$

dette proiezioni su X e Y, rispettivamente.

Proposizione Con le notazioni precedenti:

(1) La topologia prodotto su $X \times Y$ è la topologia meno fine che rende continue le due proiezioni π_X e π_Y

(2) Inoltre, con tale topologia π_X e π_Y sono entrambe aperte.

Dim (1) Sia τ una topologia sul prodotto $X \times Y$ tale che π_X e π_Y siano entrambe continue.

Allora, se U è aperto in X e V è aperto in Y, devo avere

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \text{ aperto in } X \times Y$$
$$\pi_Y^{-1}(V) = X \times V \text{ aperto in } X \times Y$$

Ma allora, siccome l'intersezione finita di aperti è aperta, l'insieme

$$(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$$

deve essere aperto in $X \times Y$. Dunque la topologia τ

deve contenere la topologia generata dagli insiemi della forma $U \times V$, con U aperto in X e V aperto in Y, cioè deve contenere la topologia prodotto.

(2) Dimostriamo che $\pi_X : X \times Y \to X$ è un'applicazione aperta. Il fatto che π_Y sia aperta si dimostra nello stesso modo. Sia dunque A aperto in $X \times Y$. Per definizione di topologia prodotto, posso scrivere

$$A = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (U_i \times V_j) \qquad \begin{array}{l} U_i \text{ aperti in } X \\ V_j \text{ aperti in } Y. \end{array}$$

Allora

$$\pi_X(A) = \pi_X\left(\bigcup_{i,j} (U_i \times V_j) \right) = \bigcup_{i,j} \pi_X (U_i \times V_j)$$

$$= \bigcup_{i \in I} U_i$$

che è aperto in X. Dunque π_X è aperta ∎

<u>Osservazione</u> La costruzione della topologia prodotto può essere effettuata per un insieme <u>finito</u> qualsiasi di fattori

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n,$$

ottenendo la topologia meno fine che rende tutte le mappe di proiezione

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_i \qquad (1 \le i \le n)$$

continue.

Una base di aperti per tale topologia è data da

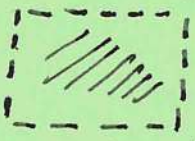
$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \mid U_i \text{ aperto in } X_i \}$$

Esempi di topologia prodotto

Es 1 La topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$.

Infatti, consideriamo il caso $n=2$ per semplicità – Siccome una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli della forma (a,b), una base per la topologia prodotto di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono i "rettangoli aperti" del tipo

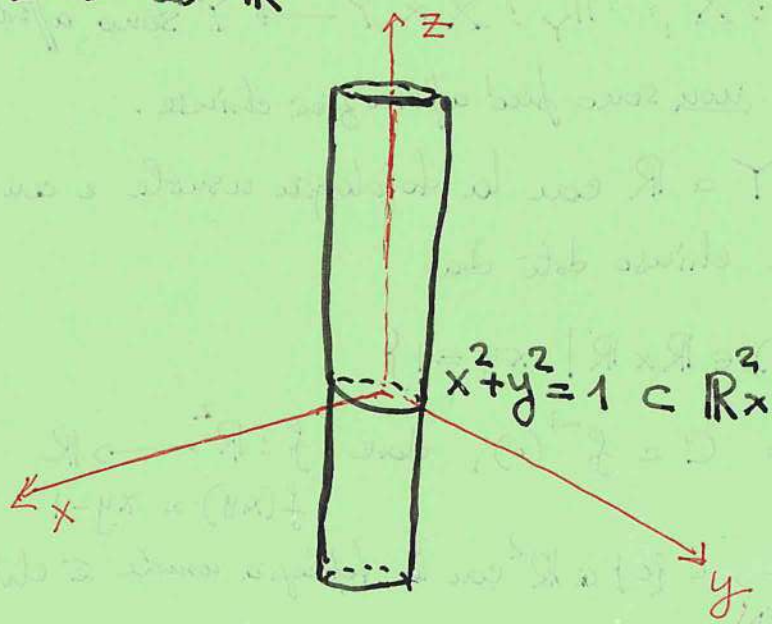
$$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$$



che formano ovviamente una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Ovviamente questa è solo una base: non tutti gli aperti sono di queste forme, ma ogni aperto è unione di rettangoli di questo tipo.

Esempio 2 Sia $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$.

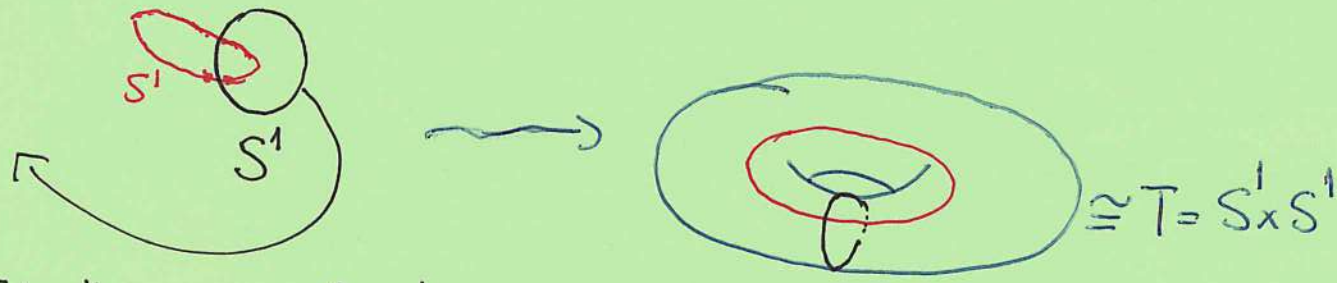
Allora $X\times Y$ è il cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, e la topologia prodotto su di esso è precisamente la topologia di sottospazio indotta da $\mathbb{R}^3$



Esempio 3 Consideriamo S^1 con la topologia indotta da $\mathbb{R}^2$. Allora lo spazio prodotto

$$T = S^1 \times S^1$$

è detto **toro**. Notiamo che l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ fornisce un'inclusione naturale $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.
Tuttavia, è possibile costruire uno spazio topologico omeomorfo a T come sottoinsieme dell'usuale spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, facendo ruotare una circonferenza intorno ad un'altra.

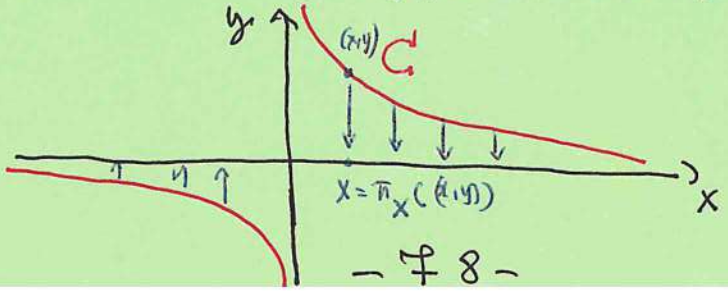


Si ottiene così il noto sottospazio di $\mathbb{R}^3$ a forma di "ciambella con un buco"!

Oss Abbiamo visto che, dotando $X \times Y$ della topologia prodotto, le due proiezioni $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sono applicazioni aperte. In generale, esse non sono però applicazioni chiuse.
Ad esempio, sia $X = Y = \mathbb{R}$ con la topologia usuale e consideriamo $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ il chiuso dato da

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$$

C è chiuso in quanto $C = f^{-1}(0)$, dove $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy - 1$
è un'applicazione continua, e $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia usuale è chiuso.



Consideriamo ora la proiezione nel primo fattore, ossia

$$\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow x$$

Allora $\pi_1(C) = \mathbb{R}-\{0\}$, che non è chiuso in $\mathbb{R}$ nonostante C sia chiuso in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Questo mostra che π_1 non è un'applicazione chiusa.

Esempio - esercizio 4 [Vedi Foglio di Esercizi 3]

Sia $S^{n-1} = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|=1\}$. Dimostriamo che $\mathbb{R}^n-\{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $S^{n-1}\times\mathbb{R}$

Infatti, consideriamo la funzione

$$f : S^{n-1}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n-\{0\}$$
$$(\underline{x}, t) \longrightarrow 2^t\cdot\underline{x}$$

- f è chiaramente una funzione continua.
- f è suriettiva. Se $\underline{y}\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, posso scrivere

$$\underline{y} = \|\underline{y}\|\cdot\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$$

Allora, posto $\underline{x} = \dfrac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$ e $t = \log_2\|\underline{y}\|$, si ha

$$f(\underline{x}, t) = \underline{y}$$

- f è iniettiva - Se $f(\underline{x}_1,t_1) = f(\underline{x}_2,t_2)$, allora

(*) $2^{t_1}\cdot\underline{x}_1 = 2^{t_2}\cdot\underline{x}_2$ e passando alle norme

$$\|2^{t_1}\underline{x}_1\| = \|2^{t_2}\cdot\underline{x}_2\| \Rightarrow 2^{t_1}\|\underline{x}_1\| = 2^{t_2}\|x_2\| \Rightarrow 2^{t_1} = 2^{t_2} \Rightarrow t_1 = t_2$$

e pertanto $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ da (*).

Dunque f è continua e biettiva. Per quanto già calcolato, l'inversa f^{-1} di f è la funzione

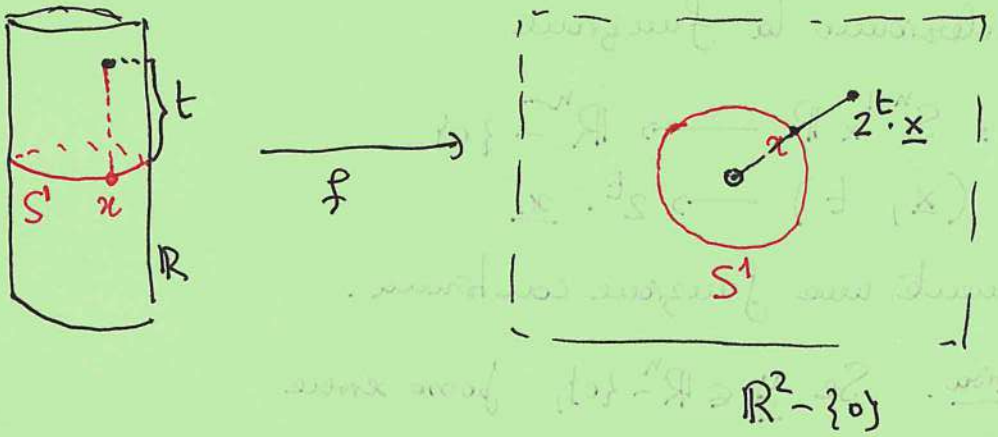
$$f^{-1}: \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}$$

$$f^{-1}\left(\underline{y}\right) = \left(\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}, \log_2 \|\underline{y}\|\right)$$

che è chiaramente una funzione continua, per cui f è un omeomorfismo.

Nel caso $n=2$, ho un omeomorfismo fra il cilindro e il piano bucato

$$f: S^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\}$$



Oss: nel caso $n=2$ si poteva dare una dimostrazione differente identificando $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ con $\mathbb{C} - \{0\}$. Allora ogni numero complesso non nullo può essere scritto come $r e^{i\theta}$, dove

$$r \in (0, +\infty) \quad \text{e} \quad e^{i\theta} \in S^1.$$

Questo mostra l'esistenza di una biezione

$$f: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow S^1 \times (0, +\infty)$$

che è chiaramente un omeomorfismo.

A questo punto, componendo con un omeomorfismo $(0, +\infty) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, otteniamo un omeomorfismo

$$g: \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

Esempio 5 (Prodotti di spazi metrici)

Siano (X, h) e (Y, k) due spazi metrici.

Allora sul prodotto $X \times Y$ è possibile mettere almeno tre metriche

$$d_1, d_2, d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definite come segue.

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = h(x_1, x_2) + k(y_1, y_2)$$

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{h(x_1, x_2)^2 + k(y_1, y_2)^2}$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{h(x_1, x_2), k(y_1, y_2)\}$$

La dimostrazione che si tratti di metriche è lasciata per esercizio. Si noti che se $(X, h) = (Y, k) = (\mathbb{R}, \text{metrica euclidea})$ allora queste sono esattamente le metriche d_1, d_2 (= euclidea), d_∞ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Si verifica facilmente che vale la catena di disuguaglianze

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 d_\infty,$$

pertanto d_1, d_2, d_∞ sono tutte fra loro Lipschitz-equivalenti e dunque inducono su $X \times Y$ la stessa topologia.

Non è difficile verificare che si tratta esattamente della topologia prodotto.

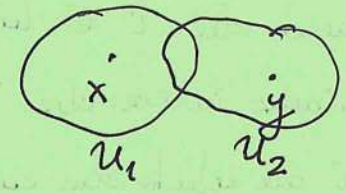
Assiomi di Separazione

Definizione Sia X uno spazio topologico. Diremo che X è di tipo

- T_0 se per ogni coppia di punti distinti esiste un aperto contenente uno di essi ma non l'altro

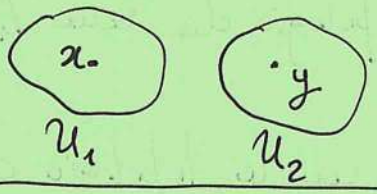
- T_1 se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti U_1 e U_2, tali che

$$x \in U_1,\ y \notin U_1 \qquad y \in U_2,\ x \notin U_2$$



- T_2 se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti U_1, U_2 tali che

$$x \in U_1,\ y \notin U_1, \qquad y \in U_2,\ x \notin U_2, \qquad U_1 \cap U_2 = \phi$$



Chiaramente

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Uno spazio T_2 è anche detto **Spazio di Hausdorff**.

Oss 1 È immediato verificare che se X e Y sono omeomorfi e X è uno spazio T_k $(k = 0, 1, 2)$ allora anche Y è uno spazio T_k.

Oss 2 Se (X, τ) è uno spazio T_k e τ' è una topologia più fine di τ, allora anche (X, τ') è uno spazio T_k.

Esempio 1 Ciascuno degli assiomi di separazione è più forte del precedente. Diamo un esempio di spazio T_0 che non è T_1.

Sia $X = \{a, b\}$ un insieme formato da due punti distinti e mettiamo su X le due topologie seguenti:

$$\tau = \{X, \phi\}$$

$$\tau_0 = \{X, \{a\}, \phi\}$$

Questo è detto "spazio di Sierpinski"

Notiamo che τ è la topologia banale, che non è mai T_0. Osserviamo invece che τ_0 è T_0 ma non T_1. Infatti $\{a\}$ è un aperto che contiene a ma non b, tuttavia non esiste nessun aperto che contiene b ma non a.

Esempio 2 Diamo ora esempi di topologie che sono T_1 ma non T_2.

- Sia X un insieme infinito con la topologia cofinita. Siano $x, y \in X$ due punti distinti. Allora $\{x\}$ e $\{y\}$ sono chiusi.

  $U_1 = X - y$ è un aperto che contiene x ma non y.

  $U_2 = X - x$ è un aperto che contiene y ma non x.

Dunque X è uno spazio T_1.

Tuttavia X non è uno spazio T_2. Infatti due aperti nella topologia cofinita su X si intersecano sempre, dato che essi sono i complementari di un insieme finito di punti e X è infinito.

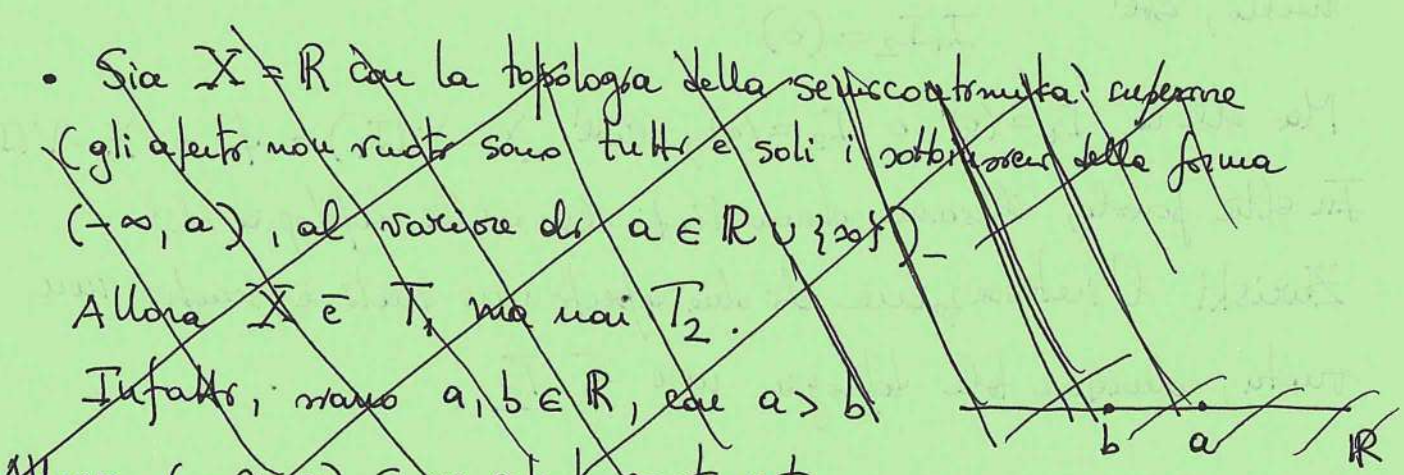
Più formalmente:

$$U_1 = X - \{p_1, \dots, p_k\}$$
$$U_2 = X - \{q_1, \dots, q_h\}$$

$$U_1 \cap U_2 = (X - \{p_1 \dots p_k\}) \cap (X - \{q_1 \dots, q_h\})$$
$$= X - (\{p_1, \dots p_k\} \cup \{q_1, \dots, q_R\}) \neq \emptyset$$

dato che X è infinito mentre $\{p_1, \dots, p_k\} \cup \{q_1, \dots, q_h\}$ è finito.

- Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità superiore (gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $(-\infty, a)$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).
Allora X è T_1 ma mai T_2.
Infatti, siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > b$.
Allora $(-\infty, a)$ è un aperto contenente



- Sia $X = \mathbb{K}^n$ con la topologia di Zariski ($\mathbb{K}$ campo).
Allora X è T_1 ma non T_2.
Infatti, siano $\underline{a}, \underline{b} \in X$. Allora posso trovare un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $f(\underline{a}) = 0$, $f(\underline{b}) \neq 0$
e un polinomio $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $g(\underline{a}) \neq 0$, $g(\underline{b}) = 0$.
Allora
$X - V(f)$ è un aperto contenente $\underline{b}$ ma non $\underline{a}$
$X - V(g)$ è un aperto contenente $\underline{a}$ ma non $\underline{b}$,
il che mostra che X è T_1.

Tuttavia, X in generale non è T_2. Infatti, gli aperti di X sono della forma $X - V(I)$, dove $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un ideale.
Dunque

$$(X - V(I_1)) \cap (X - V(I_2)) = X - (V(I_1) \cup V(I_2))$$
$$= X - V(I_1 I_2)$$

Allora $(X - V(I_1)) \cap (X - V(I_2)) = \phi$ se e solo se

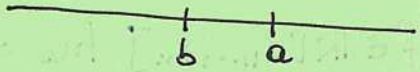
$$V(I_1 I_2) = X$$

Questo vuol dire che ogni polinomio di $I_1 I_2$ si annulla su tutto X, ossia che ogni polinomio di $I_1 I_2$ è il polinomio nullo, cioè $I_1 I_2 = (0)$

Ma allora $I_1 = (0)$ o $I_2 = (0)$, cioè $X - V(I_1) = \phi$ o $X - V(I_2) = \phi$.
In altre parole, abbiamo dimostrato che nella topologia di Zariski l'intersezione di due aperti non vuoti è sempre non vuota, dunque tale topologia non è T_2.

Esempio 3 Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità superiore (gli aperti non vuoti sono tutti e soli le semirette della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e supponiamo $a > b$

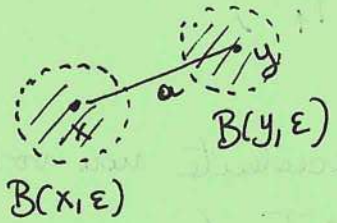


Allora $U = (-\infty, a)$ è un aperto che contiene b ma non a. Dunque la topologia della semicontinuità superiore è T_0.
Tuttavia, ogni aperto che contiene a necessariamente contiene b. Dunque la topologia della semicontinuità superiore non è T_1.

Proposizione Ogni spazio metrico (X,d) è T_2.
In particolare, ogni spazio discreto è T_2 e $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è T_2.

Dim Sia (X,d) uno spazio metrico e siano x, y due punti distinti di X. Sia $a = d(x,y)$ e prendiamo

$$0 < \varepsilon < a/2.$$



Affermo che le due palle aperte $B(x,\varepsilon)$ e $B(y,\varepsilon)$ sono disgiunte. Infatti, supponiamo che esista

$$z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon).$$

Allora

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,$$

contraddizione.

Dunque $B(x,\varepsilon)$ e $B(y,\varepsilon)$ sono due aperti contenenti x e y, rispettivamente, e tali che

$$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset.$$

Ciò mostra che X è uno spazio di Hausdorff. ∎

Corollario
Se uno spazio topologico non è di Hausdorff, allora non è metrizzabile.

Esempi:

- Sia X uno spazio topologico con topologia banale. Se X contiene almeno due punti distinti, X non è metrizzabile (non è neanche T_0).

- Uno spazio infinito con la topologia cofinita non è metrizzabile (non è T_2)
- $\mathbb{K}^n$ con la topologia di Zariski non è metrizzabile (non è T_2)
- $\mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità superiore non è metrizzabile (non è neanche T_1)

Oss Il viceversa del corollario precedente non vale. Infatti, esistono esempi di spazi T_2 che non sono metrizzabili.

[Proposizione (Caratterizzazione degli spazi T_1)
Uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se, e solo se, vale una delle condizioni seguenti (che sono equivalenti)
(1) Ogni punto $x \in X$ è chiuso.
(2) Per ogni punto $x \in X$ l'intersezione degli intorni di x è $\{x\}$]

Dimostrazione

(1) Supponiamo che ogni punto di X sia chiuso e mostriamo che X è uno spazio T_1.
Infatti, siano x e y due punti distinti di X.
Siccome x è chiuso, $U = X - \{x\}$ è un aperto di X contenente y ma non x. Analogamente, $V = X - \{y\}$ è un aperto di X contenente x ma non y.
Questo mostra che X è uno spazio T_1

Viceversa, supponiamo che X sia T_1 e mostriamo che ogni punto è chiuso.

Sia $x \in X$ e sia $y \neq x$ un altro punto di X.

Allora esiste un aperto U di X contenente y ma non x.

In altre parole,

$$\forall y \in X - \{x\} \quad \text{esiste } U \text{ aperto con } y \in U \text{ e } U \subseteq X - \{x\}$$

Ma questo vuol dire che $X - \{x\}$ è aperto, ossia che $\{x\}$ è chiuso.

(2) Supponiamo che X sia T_1 e mostriamo che

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U = \{x\}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$, $y \neq x$.

Allora ogni intorno di x in X contiene anche y. In particolare, non esiste nessun aperto contenente x ma non y, contraddizione dato che X è T_1.

Viceversa, supponiamo che $\forall x \in X$ si abbia

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U = \{x\}$$

Allora, se $y \neq x$, posso trovare $U \in \mathcal{I}(x)$ con $y \notin U$.

Questo implica che esiste un aperto di X contenente x ma non y.

Siccome il ragionamento può essere fatto per ogni coppia di punti $x, y \in X$ con $x \neq y$, segue che X è uno spazio T_1. ∎

Esempio Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità superiore.

Allora X non è T_1, infatti nessun punto è chiuso.

Dato $x \in X$, si ha

$$\overline{\{x\}} = [x, +\infty)$$

Corollario Se X è uno spazio T_1 finito, allora X ha necessariamente la topologia discreta (in particolare è T_2).

Dim Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Siccome X è T_1, ogni $\{x_i\}$ è chiuso in X

Siccome l'unione finita di chiusi è chiusa, segue che

$$\bigcup_{j \neq i} \{x_j\} \text{ è anche chiusa.}$$

Ma allora $X - \bigcup_{j \neq i} \{x_j\} = \{x_i\}$ è aperto in X.

Questo vale per ogni i, dunque ogni punto di X è aperto e pertanto X è uno spazio discreto. ∎

Oss Ovviamente senza la condizione "X finito" il corollario precedente è falso. Ad esempio, $\mathbb{R}$ è T_2, dunque è T_1, ma ovviamente non è discreto.

Proposizione (1) Sia X uno spazio T_1, $Y \subseteq X$ un sottoinsieme e $x \in X$ un punto di accumulazione per Y.
Allora per ogni intorno U di x, l'insieme $U \cap Y$ è infinito.

(2) Sia X uno spazio T_1, $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.
Allora il derivato $D(Y)$ di Y è chiuso.

Rmk $D(Y)$ = derivato di Y = insieme dei punti di accumulazione di Y.

Dim

(1) Supponiamo per assurdo che esista $U \in \mathcal{I}(x)$ tale che $U \cap Y$ sia finito, e siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ i punti di $U \cap Y$ diversi da x. Siccome x è T_1, esistono intorni $U_1, U_2, \dots, U_n$ di x tali che

$$x_1 \notin U_1, \quad x_2 \notin U_2, \dots, x_n \notin U_n.$$

Ma allora $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ non contiene nessuno dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$. Allora

$$U \cap U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \cap Y$$

contiene al più il punto x. Questo contraddice l'ipotesi che x sia di accumulazione per Y.

(2) Sia $x \in \overline{D(Y)}$ e sia U un intorno aperto di x.

Ricordiamo che un punto appartiene alla chiusura di un insieme x e solo se ogni intorno del punto interseca l'insieme. Pertanto otteniamo

$$U \cap D(Y) \neq \emptyset$$

Dunque l'intorno aperto U di x contiene almeno un punto $y \in D(Y)$; poiché U è aperto, U è intorno di y, e per definizione di punto di accumulazione segue che U contiene un punto $z \in Y$ ($e\ z \neq y$).

Allora $$U \cap Y \neq \emptyset$$

Dunque, per la parte (1), $U \cap Y$ è un insieme infinito.

Abbiamo dunque dimostrato che ogni intorno U di x contiene infiniti punti di Y, in particolare contiene punti di Y diversi da x. Segue che $x \in D(Y)$.

Ma allora $\overline{D(Y)} \subseteq D(Y)$, cioè $\overline{D(Y)} = D(Y)$ e quindi $D(Y)$ è chiuso. ∎

Oss Senza l'ipotesi che X sia T_1, non è vero in generale che $D(Y)$ sia chiuso per ogni $Y \subseteq X$.

Ad esempio, sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità inferiore (che è T_0 ma non T_1). Se $x \in X$, allora

$$\overline{\{x\}} = [x, +\infty)$$

Si ha

$$\overline{\{x\}} = \{x\}^* \cup D(\{x\}) = \{x\} \cup D(\{x\})$$

dunque $D(\{x\}) = (x, +\infty)$ che non è un sottoinsieme chiuso di X. Inoltre $\overline{D(\{x\})} = [x, +\infty)$.

Spazi di Hausdorff (T_2)

Oss Siccome ogni spazio T_2 è T_1, tutto ciò che è stato dimostrato per gli spazi T_1 continua a valere.

Abbiamo visto come l'ampia classe degli spazi metrici fornisca importanti esempi di spazi di Hausdorff. Studiamo ora più in dettaglio questa classe di spazi.

Proposizione Sia X uno spazio di Hausdorff e $Y \subseteq X$ un sottospazio. Allora Y è uno spazio di Hausdorff.

Dim Siano $y_1, y_2 \in Y$ due punti distinti.
Siccome $Y \subseteq X$ e X è di Hausdorff, posso trovare due aperti U_1, U_2 di X tali che

$$y_1 \in U_1, \quad y_2 \in U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Ma allora, posto $V_1 = U_1 \cap Y$, $V_2 = U_2 \cap Y$, V_1 e V_2 sono due aperti in Y tali che

$$y_1 \in V_1, \quad y_2 \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Questo mostra che Y è di Hausdorff ∎

Proposizione Sia $X = X_1 \times \dots \times X_n$ un prodotto di spazi topologici. Allora X è di Hausdorff se e solo se ogni X_i è di Hausdorff.

Dim. Per semplicità supponiamo $n = 2$, cioè $X = X_1 \times X_2$.
La dimostrazione nel caso generale è analoga.

$\Rightarrow$ Supponiamo che X_1 e X_2 siano di Hausdorff e dimostriamo che $X = X_1 \times X_2$ è di Hausdorff.

Siano dunque $p = (x_1, x_2)$, $q = (y_1, y_2)$ due punti di $X_1 \times X_2$, con $p \neq q$. Allora $x_1 \neq y_1$ oppure $x_2 \neq y_2$.
Senza ledere la generalità, posso supporre $x_1 \neq y_1$.
Allora, siccome X_1 è di Hausdorff, posso trovare due aperti

$\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ di X_1 tali che

$$x_1 \in \mathcal{U}, \quad y_1 \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{V} = \phi.$$

Allora

$$\mathcal{U} \times X_2, \quad \mathcal{V} \times X_2$$

sono due aperti di $X_1 \times X_2$ tali che

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{U} \times X_2, \quad (y_1, y_2) \in \mathcal{V} \times X_2, \quad (\mathcal{U} \times X_2) \cap (\mathcal{V} \times X_2) = \phi.$$

Questo mostra che $X_1 \times X_2$ è uno spazio di Hausdorff.

$\Leftarrow$ Supponiamo ora che $X_1 \times X_2$ sia uno spazio di Hausdorff e mostriamo che X_1 e X_2 sono spazi di Hausdorff.

Osserviamo che, fissati punti $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, si ha che

$$X_1 \text{ è omeomorfo a } X_1 \times \{x_2\}$$

$$X_2 \text{ è omeomorfo a } \{x_1\} \times X_2.$$

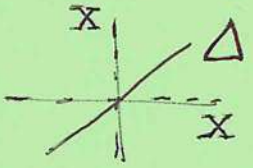
Ma entrambi $X_1 \times \{x_2\}$ e $\{x_1\} \times X_2$ sono sottospazi di X; siccome X è di Hausdorff, per la Proposizione precedente essi sono anche di Hausdorff e la dimostrazione è conclusa ∎

Sia X uno spazio topologico.

Il sottoinsieme

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

è detto la <u>diagonale</u> di $X \times X$



[<u>Teorema</u> X è uno spazio di Hausdorff se e solo se Δ è un sottoinsieme chiuso di $X \times X$]

<u>Dim.</u> Cominciamo ad osservare che se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sono due sottoinsiemi qualsiasi di X, allora

$U \cap V = \phi$ in X $\iff$ $(U \times V) \cap \Delta = \phi$ in $X \times X$

$\Rightarrow$ Sia X uno spazio di Hausdorff e consideriamo un punto $(x,y) \in (X \times X) - \Delta$. Per definizione di Δ si ha $x \neq y$, dunque posso trovare due aperti U, V di X tali che

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \phi.$$

Allora $(U \times V) \cap \Delta = \phi$ in $X \times X$, cioè

$$U \times V \subseteq (X \times X) - \Delta$$

Questo mostra che $(X \times X) - \Delta$ è aperto in $X \times X$, dunque che Δ è chiuso.

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo che Δ sia chiusa in $X \times X$. Allora $(X \times X) - \Delta$ è aperto, dunque preso $(x,y) \in (X \times X) - \Delta$ (cioè $x \neq y$) posso trovare un intorno $\Omega \in \mathcal{I}((x,y))$ tutto contenuto in $(X \times X) - \Delta$. Per definizione di topologia prodotto, esistono U aperto contenente x e V aperto contenente y tali che

$$U \times V \subseteq \Omega \subseteq (X \times X) - \Delta$$

Ciò vuol dire $(U \times V) \cap \Delta = \phi$, ossia $U \cap V = \phi$ in X. Allora ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ è separata da aperti disgiunti, cioè X è uno spazio di Hausdorff.

Spazi di Hausdorff e applicazioni continue

Proposizione Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ due applicazioni continue fra spazi topologici. Supponiamo che Y sia di Hausdorff e definiamo

$$Z = \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$$

Allora Z è chiuso in X

Dimostrazione Mostriamo che

$$X - Z = \{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \} \text{ è aperto.}$$

Sia dunque $x \in X - Z$. Poiché $f(x) \neq g(x)$ e Y è di Hausdorff, esiste un intorno U_1 di $f(x)$ e uno V_1 di $g(x)$ tali che $U_1 \cap V_1 = \emptyset$.
Per continuità di f e g, esiste un intorno U di x tale che

$$f(U) \subseteq U_1 \quad \text{e} \quad g(U) \subseteq V_1.$$

~~Se un intorno X di y tale che $f(X) \subseteq Y$~~

Allora $f(U) \cap g(U) \subseteq U_1 \cap V_1 = \emptyset$,
cioè $f(U) \cap g(U) = \emptyset$.

Ciò implica $U \cap Z = \emptyset$, cioè $U \subseteq X - Z$.

Questo mostra che $X - Z$ è aperto, cioè che Z è chiuso. ∎

Altra dimostrazione:
$h: X \longrightarrow Y \times Y$, $h(x) = (f(x), g(x))$
è continua e si ha
$Z = h^{-1}(\Delta)$
dove Δ è la diagonale in $Y \times Y$ che è chiusa.

Corollario Siano $f, g: X \longrightarrow Y$ due applicazioni continue fra spazi topologici, e supponiamo che Y sia di Hausdorff. Supponiamo che f e g coincidano su tutti i punti di un sottoinsieme D che è denso in X. Allora $f = g$.

Dimostrazione Dalla proposizione precedente sappiamo che l'insieme $Z \subseteq X$ definito da

$$Z = \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$$

è chiuso in X. D'altra parte, per ipotesi, $D \subseteq Z$.
Allora siccome D è denso in X:

$$X = \overline{D} \subseteq \overline{Z} = Z,$$

cioè $X \subseteq Z$. Questo mostra $X = Z$, cioè $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$. ∎

Oss 1 Sia X uno spazio topologico separabile e Y spazio di Hausdorff.
Allora ogni funzione continua $f: X \longrightarrow Y$ è univocamente determinata da un'insieme numerabile di valori

(più precisamente, dai valori assunti su un sottoinsieme denso e numerabile di X).

Ad esempio, consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia usuale; esso è uno spazio separabile che di Hausdorff. Allora ogni funzione continua

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

è univocamente determinata dai valori che assume su $\mathbb{Q}$.

Oss 2 Se $f : X \to X$ è un'applicazione continua di uno spazio topologico in sé, diremo che $x \in X$ è un punto fisso per f se $f(x) = x$.

Osserviamo che l'insieme $Fix(f)$ dei punti fissi di f si può vedere come

$$Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = id_X(x)\}$$

Siccome f e id_X sono funzioni continue, dalla Proposizione precedente segue che se X è Hausdorff allora $Fix(f)$ è chiuso in X.

Ad esempio, se $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = (y,x)$$

allora $Fix(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

Se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$g(x,y) = (-x, y)$

allora $Fix(g) = \{x = 0\} =$ asse y.

Osserviamo che se X non è Hausdorff allora $Fix(f)$ può non essere chiuso.
Ad esempio, consideriamo $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia

cofinita, che sappiamo essere T_1 ma non T_2.

Consideriamo $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = (-x, y)$$

La funzione g è chiaramente biettiva. Allora, poiché un chiuso C nella topologia cofinita è un insieme finito di punti, anche $g^{-1}(C)$ è un insieme finito di punti. Dunque $g^{-1}(C)$ è chiuso, cioè g è continua.

Osserviamo che

$$Fix(g) = \{x = 0\}$$

è un insieme infinito, dunque non è un chiuso.

Proposizione Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua da uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y. Allora il grafico

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

è chiuso in $X \times Y$.

Dim Definiamo l'applicazione

$$g: X \times Y \longrightarrow Y, \quad g(x,y) := f(x)$$

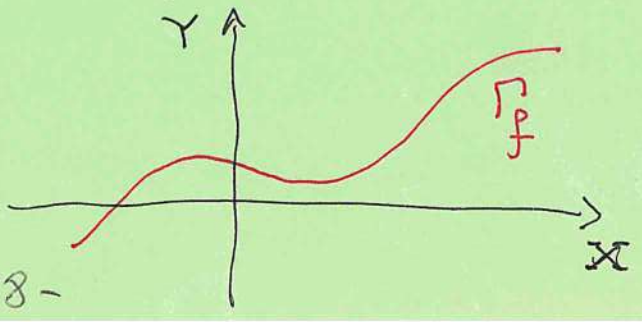
fra poi $\pi_2: X \times Y \longrightarrow Y, \quad \pi_2(x,y) = y$

la proiezione sul secondo fattore.

Allora entrambe g e π_2 sono funzioni continue e si ha

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid g(x,y) = \pi_2(x,y)\}$$

poiché Y è di Hausdorff, segue che Γ_f è chiuso in $X \times Y$. ∎



Spazi connessi

L'idea intuitiva di "spazio connesso" è quella di "spazio formato da un solo pezzo". Ad esempio, con tale idea intuitiva di spazio connesso $X=\mathbb{R}-\{0\}$ non è connesso, dato che è formato dai due "pezzi"

$$X_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}, \quad X_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}.$$

Vediamo ora come si può formalizzare in modo rigoroso il concetto di connessione.

Definizione Uno spazio topologico X si dice <u>connesso</u> se gli unici sottoinsiemi di X che sono contemporaneamente aperti e chiusi in X sono il vuoto e X.
Uno spazio topologico si dice <u>sconnesso</u> se non è connesso, ovvero se esiste $Y \subsetneq X$ non vuoto tale che Y è sia aperto che chiuso in X

Proposizione Per uno spazio topologico X, le seguenti proprietà sono equivalenti:
(1) X è sconnesso
(2) X è unione disgiunta di due aperti propri
(3) X è unione disgiunta di due chiusi propri.

Esercizio
X è connesso se e solo se ogni mappa continua $X \to \{0,1\}$ ($\{0,1\}$ con la topologia discreta) è costante

Dim

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia X sconnesso. Allora esiste $Y \subset X$, $Y \neq X$ e $Y \neq \emptyset$, tale che Y è sia aperto che chiuso in X.
In particolare, X è unione disgiunta di due aperti propri

$$X = Y \cup (X-Y)$$

2) $\Rightarrow$ 3) Supponiamo che esistano A e B aperti propri in X tali che

$$X = A \cup B$$

Allora $A = X - B$ e $B = X - A$, dunque A e B sono anche chiusi in X, pertanto X è anche unione disgiunta di due chiusi propri.

3) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo che esistano due chiusi propri A e B tali che

$$X = A \cup B.$$

Poiché l'unione è disgiunta, $B = X - A$ è aperto. Dunque B è sia aperto che chiuso in X, pertanto X è sconnesso. ∎

Esempio 1 $X = \mathbb{R} - \{0\}$ è sconnesso (con la topologia di sottospazio)

Infatti

$$X = X_+ \cup X_- \qquad X_+ = \mathbb{R}_{>0}$$
$$X_- = \mathbb{R}_{<0}$$

ed entrambi X_+ e X_- sono aperti in X. Infatti

$$X_+ = X \cap (0, +\infty)$$
$$X_- = X \cap (-\infty, 0)$$

ed entrambi $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ sono aperti di $\mathbb{R}$.

Esempio 2 Sia X uno spazio topologico discreto (con almeno due punti). Allora X è sconnesso. Infatti in X ogni sottoinsieme è aperto. Allora, preso $x \in X$ qualsiasi, X si scrive come unione disgiunta di due aperti propri come segue

$$X = \{x\} \cup (X - \{x\})$$

Esempio 3 Uno spazio topologico T_1 con almeno due punti e che contenga punti isolati non è connesso (se x è isolato, $\{x\}$ è aperto, ma è anche chiuso essendo lo spazio T_1).

Oss Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottospazio. Diremo che Y è connesso se è connesso con la topologia di sottospazio. Ad esempio, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è chiaramente sconnesso. Un altro importante esempio è il seguente:

Esempio 4 Il sottospazio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) è sconnesso. Infatti

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2 \quad \text{dove } \mathbb{Q}_1 \text{ e } \mathbb{Q}_2 \text{ sono aperti dati da:}$$

$$\mathbb{Q}_1 = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2} \} \qquad \mathbb{Q}_2 = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2} \}$$

Analogamente, il sottospazio $X = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali è sconnesso con la topologia euclidea. Infatti

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{dove } X_1 \text{ e } X_2 \text{ sono aperti dati da}$$

$$X_1 = \{ x \in X \mid x > 0 \} \qquad X_2 = \{ x \in X \mid x < 0 \}$$

In generale, non è facile dimostrare direttamente che un insieme è connesso. Diamo ora un importante esempio.

[Teorema L'intervallo $[0,1]$ è connesso per la topologia euclidea.]

Dim Siano C, D due sottoinsiemi chiusi e non vuoti di $[0,1]$ tali che $C \cup D = [0,1]$. Vogliamo mostrare che allora l'unione non può essere disgiunta, ossia che $C \cap D \neq \emptyset$.
Infatti, supponiamo che $0 \in C$ e indichiamo con $d \in [0,1]$ l'estremo inferiore di D (ricordiamo che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente ha estremo inferiore).
Chiaramente $d \in D$, dato che D è chiuso. Se $d = 0$, allora

$0 \in C \cap D$ e abbiamo finito.

Supponiamo dunque $d > 0$ e poniamo

$$E := C \cap [0, d].$$ Affermo che

~~E è chiuso (intersezione di chiusi) e quindi~~ E contiene $[0, d)$:
infatti se esistesse $x \in [0, d)$ con $x \notin E$, allora $x \notin C$
e $x \notin D$, poiché l'estremo superiore di D è d, contraddicendo

$$[0, 1] = C \cup D.$$

Ma allora, essendo E chiuso (intersezione di chiusi)
segue che $d \in E$, dunque $d \in C$. Allora

$$d \in C \cap D,$$

ora $C \cap D \neq \phi$ ∎

Oss Un argomento analogo a quello della dimostrazione precedente mostra che un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è connesso se e solo se è un intervallo (aperto, chiuso, semiaperto, limitato o illimitato).
In particolare, $\mathbb{R}$ è connesso.

Oss Supponiamo che (X, τ) sia uno spazio topologico connesso. Allora se τ' è una topologia meno fine di τ, anche (X, τ') è connesso.
Se invece τ'' è una topologia più fine di τ, non è detto che (X, τ'') sia connesso. Ad esempio, sappiamo che ogni spazio con la topologia discreta è sconnesso. Per un esempio più interessante, consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, che sappiamo essere connesso - Consideriamo ora la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$,

che sappiamo avere come base degli aperti la famiglia di intervalli della forma $[a,b)$. Questa topologia è strettamente più fine della topologia euclidea, ed affermo che essa rende $\mathbb{R}$ uno spazio topologico sconnesso.

Infatti notiamo che vecone

$$[0,+\infty) = \bigcup_{\varepsilon>0} [0,\varepsilon)$$

$$(-\infty,0) = \bigcup_{\xi>0} [-\xi,0)$$

entrambi i sottoinsiemi $[0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ sono aperti nella topologia di Sorgenfrey, dunque posso scrivere

$$\mathbb{R}_{sf} = (-\infty,0) \cup [0,+\infty)$$

come unione disgiunta di aperti propri, il che mostra che $\mathbb{R}_{sf}$ è sconnesso.

Il prossimo risultato mostra che la connessione è di fatto una proprietà topologica.

Teorema Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua. Allora se X è connesso, l'immagine $f(X)$ è connesso.

Dim Sia $Z \subseteq f(X)$ un sottospazio non vuoto, aperto e chiuso in $f(X)$. Voglio mostrare che $Z = f(X)$.

Per definizione di topologia di sottospazio, esistono un aperto non vuoto $A \subseteq Y$ e un chiuso non vuoto $C \subseteq Y$ tale che

$$Z = f(X) \cap A = f(X) \cap C.$$

Siccome f è continua, ho che

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}(f(X) \cap A) = X \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(A) \text{ è aperto (che)}$$

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}(f(X) \cap C) = X \cap f^{-1}(C) = f^{-1}(C) \text{ è chiuso (che)}$$

In altre parole, $f^{-1}(Z)$ è non vuoto, ed è sia aperto che chiuso in X. Per ipotesi X è connesso, pertanto

$$f^{-1}(Z) = X,$$

cioè $Z = f(X)$ come volevamo. ∎

Corollario

Siano X e Y due spazi topologici omeomorfi.
Allora X è connesso se e solo se Y è connesso.
In altre parole, *la connessione è una proprietà topologica*.

Esempio La funzione di Dirichlet

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua. Infatti $[0,1]$ è connesso, ma $f([0,1]) = \{0,1\}$ che è uno spazio topologico sconnesso.

Analogamente per la funzione di Dirichlet definita su tutto $\mathbb{R}$.

Spesso alcune dimostrazioni diventano molto rapide utilizzando il concetto di "punto che sconnette", che ora andiamo a definire.

Definizione Sia X uno spazio topologico connesso. Diremo che un punto $x \in X$ "disconnette X" se $X - \{x\}$ è sconnesso.

Es Ogni punto disconnette $\mathbb{R}$, ma nessun punto disconnette S^1.

Proposizione Siano X e Y spazi topologici omeomorfi (connessi). Allora x disconnette X se e solo se $f(x)$ disconnette Y.

Dim Sia $x \in X$ e supponiamo che $f: X \to Y$ sia un omeomorfismo. Allora la restrizione

$$\tilde{f}: X - \{x\} \longrightarrow Y - f(x)$$

è anche un omeomorfismo. Siccome la connessione è una proprietà topologica, segue che $X - \{x\}$ è connesso se e solo se $Y - f(x)$ lo è. ∎

Oss / Esercizio Utilizzando lo stesso tipo di argomenti, si può dimostrare che se X e Y sono omeomorfi allora il massimo numero di punti che non sconnettono X è uguale al massimo numero di punti che non sconnettono Y.

Questi ragionamenti di connessione sono molto utili per escludere l'esistenza di omeomorfismi in alcuni casi.

Esempi

- $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a S^1
- $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$: infatti

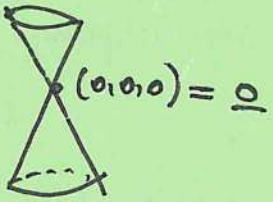
ogni punto sconnette $\mathbb{R}$ ma nessun punto sconnette $\mathbb{R}^n$.

- $[0,1]$, $[0,1)$ e $(0,1)$ sono a due a due non omeomorfi.

Infatti ogni punto sconnette $(0,1)$, mentre $\{0\}$ non sconnette $[0,1)$ e $\{0,1\}$ non sconnettono $[0,1]$.

- S^1 e la curva a forma di otto $\infty = X$ sono non omeomorfi. Infatti il punto x disconnette X, ma nessun punto disconnette S^1.

- Sia $X = \{xy - z^2 = 0\}$ un cono in $\mathbb{R}^3$



Allora X non è omeomorfo a S^2 ☹

X non è omeomorfo a $S^1 \times S^1 = T$

X non è omeomorfo al cilindro $\mathbb{R} \times S^1$

Infatti il vertice 0 disconnette il cono, mentre gli altri tre spazi non contengono alcun punto che li disconnette.

Quest'ultimo esempio è svolto in modo un po' intuitivo, dato che non abbiamo dimostrato rigorosamente che $S^1 \times S^1$ e $\mathbb{R} \times S^1$ sono connessi. Lo faremo adesso.

Innanzitutto, S^1 è connesso. Infatti la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

è continua e suriettiva. Poiché $\mathbb{R}$ è connesso, $S^1 = f(\mathbb{R})$ è anche connesso.

Il resto della dimostrazione segue dal risultato seguente

Proposizione Lo spazio prodotto $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ è connesso se e solo se ogni X_i è connesso.

Dim Per fissare le idee, sia $n=2$, dunque consideriamo il prodotto

$$X_1 \times X_2.$$

($\Rightarrow$) Supponiamo che X sia connesso. Siccome le due mappe di proiezione

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$$
$$\pi_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$$

sono continue e suriettive, si ha $X_1 = \pi_1(X_1 \times X_2)$, $X_2 = \pi_2(X_1 \times X_2)$. Dato che $X_1 \times X_2$ è connesso, lo stesso vale per X_1 e X_2.

($\Leftarrow$) Supponiamo che X_1 e X_2 siano entrambi connessi e consideriamo un'applicazione continua

$$f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \{0,1\}$$

dove $\{0,1\}$ ha la topologia discreta. Se mostriamo che f è una funzione costante, per un esercizio dato in precedenza abbiamo concluso che $X_1 \times X_2$ è connesso.

Fissiamo $z_1 \in X_1$ e $z_2 \in X_2$, e consideriamo le due applicazioni continue

$$f_{z_1} : X_2 \longrightarrow \{0,1\} \qquad \forall x_2 \in X_2$$
$$f_{z_1}(x_2) := f(z_1, x_2)$$

$$f_{z_2} : X_1 \longrightarrow \{0,1\} \qquad \forall x_1 \in X_1$$
$$f_{z_2}(x_1) := f(x_1, z_2)$$

Siccome X_1 e X_2 sono connessi, lo stesso deve valere per $f_{z_1}(X_2)$ e $f_{z_2}(X_1)$. Ma allora, siccome il codominio di f_{z_1} e f_{z_2} è $\{0,1\}$ con la topologia discreta, f_{z_1} e f_{z_2} non possono essere suriettive. In altre parole, f_{z_1} e f_{z_2} sono costanti, in altre parole

$$f(z_1, x_2) = f(z_1, x_2') \qquad \forall\, x_2, x_2' \in X_2$$
$$f(x_1, z_2) = f(x_1', z_2) \qquad \forall\, x_1, x_1' \in X_1$$

A questo punto, siano

$$(x_1, x_2), (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$$

due punti qualsiasi nel prodotto. Si ha

$$f(z_1, z_2) = f_{z_2}(z_1) = f_{z_2}(x_1) = f(x_1, z_2)$$

(f_{z_2} è costante)

$$= f_{x_1}(z_2) = f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$$

(f_{x_1} è costante)

Questo mostra che

$$f(z_1, z_2) = f(x_1, x_2)$$

e siccome $(z_1, z_2), (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ erano punti qualsiasi, segue che

$$f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \{0,1\}$$

è costante. Allora $X_1 \times X_2$ è connesso. ∎

Componenti connesse

Vogliamo ora studiare i sottoinsiemi connessi massimali (rispetto all'inclusione) di uno spazio topologico X. Cominciamo a stabilire alcuni lemmi preliminari.

Lemma 1 Sia X uno spazio topologico e A, B due aperti propri e disgiunti tali che

$$X = A \cup B \qquad \text{(ie particolare } X \text{ è sconnesso)}$$

Sia Y un sottoinsieme non vuoto e connesso di X. Allora

$$Y \subseteq A \quad \text{oppure} \quad Y \subseteq B.$$

Dim Se $Y \cap A \neq \phi$ e $Y \cap B \neq \phi$, allora $Y \cap A$ e $Y \cap B$ sono aperti non vuoti e disgiunti di Y tali che

$$Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B),$$

cioè Y è sconnesso, contraddizione. ∎

Lemma 2 Sia X uno spazio topologico e $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi e a due a due non disgiunti di X.
Allora l'unione

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$$

è un sottoinsieme connesso di X.

Dim Supponiamo che Y non sia connesso. Allora esistono due aperti A e B non vuoti di Y, tali che

$$Y = A \cup B$$

Siccome $Y_i \subseteq Y$ per ogni i e Y_i è connesso, dal Lemma 1 segue

$$Y_i \subseteq A \quad \text{oppure} \quad Y_i \subseteq B.$$

Siccome A e B sono entrambi non vuoti, esistono $i, j \in I$ tali che $Y_i \subseteq A$ e $Y_j \subseteq B$

Ma allora $Y_i \cap Y_j \subseteq A \cap B = \emptyset$,

contraddicendo l'ipotesi che gli $\{Y_i\}_{i \in I}$ sono a due a due (non disgiunti). ∎

Corollario Sia X uno spazio topologico e supponiamo che

$$X = \bigcup_{i \in I} Y_i$$

dove gli Y_i sono connessi e a due a due ~~disgiunti~~ non disgiunti (ad esempio, la seconda condizione è vera se $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$).

Allora X è connesso.

Esempio 1 S^1 è connesso. Infatti, presi due punti p e q su S^1, posso scrivere

$$S^1 = (S^1 - \{p\}) \cup (S^1 - \{q\})$$

$S^1 - \{p\}$ e $S^1 - \{q\}$ sono entrambi omeomorfi a $\mathbb{R}$ (proiezione stereografica) dunque sono connessi, e la loro intersezione è non vuota. Dunque la connessione di S^1 segue dal Corollario.

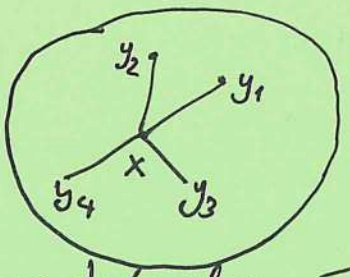
Esempio 2 Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per x_1 e $x_2 \in X$, il segmento

$$\overline{x_1 x_2} = t x_1 + (1-t) x_2 \qquad t \in [0,1]$$

è tutto contenuto in X. Ad esempio, il disco aperto è convesso, mentre la sfera S^{n-1} non lo è.

Se X è convesso, presi $x \in X$ qualsiasi posso scrivere

$$X = \bigcup_{y \in X} \overline{xy}$$



Ogni segmento $\overline{xy}$ è connesso dato che è omeomorfo a $[0,1]$ che è connesso. D'altronde

$$\overline{xy_1} \cap \overline{xy_2} = \{x\} \neq \emptyset$$

dunque X si scrive come unione di connessi a due a due non disgiunti. Dal corollario ricaviamo che

Ogni sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso.

In particolare $\mathbb{R}^n$ è connesso $\forall n \geq 1$

(questo è un caso particolare del concetto di "connessione per archi").

Esempio 3 Sia $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sfera n-dimensionale. Presi $p, q \in S^n$, posso scrivere

$$S^n = (S^n - \{p\}) \cup (S^n - \{q\})$$

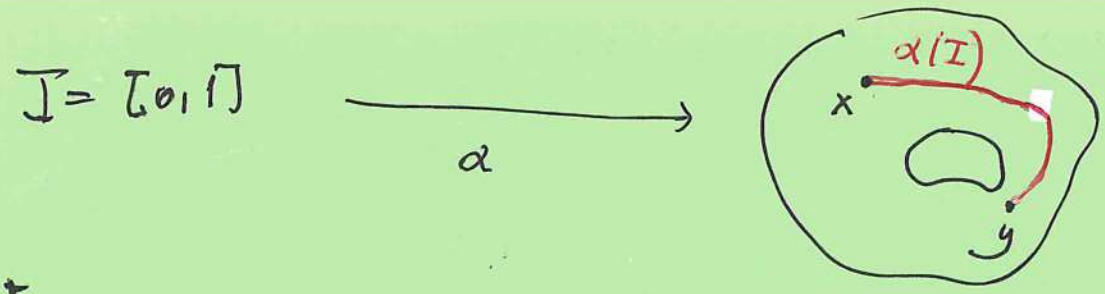
$S^n - \{p\}$ e $S^n - \{q\}$ sono entrambi omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$, dunque connessi (proiezione stereografica).
Siccome la loro intersezione è non vuota, segue che S^n è connesso per ogni $n \geq 1$.

Esempio 4 (Spazi connessi per archi)

Esempio importante

Sia X uno spazio topologico, $I = [0,1]$.
Chiamerò **arco continuo** (o semplicemente arco) da x a y ($x, y \in X$) una funzione continua

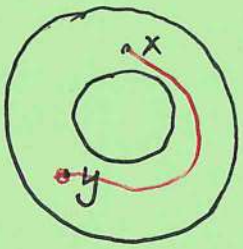
$$\alpha : I \longrightarrow X, \quad \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y.$$



Def Uno spazio topologico X si dice connesso per archi se dati due punti qualsiasi $x, y \in X$, esiste un arco $\alpha : I \longrightarrow X$ congiungente x a y.

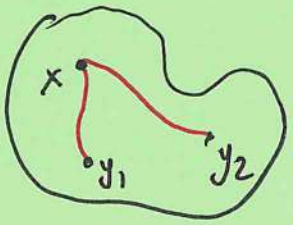
Ad esempio, ogni spazio convesso $\subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per archi (come arco congiungente due punti prendo il segmento fra essi.)

Il viceversa non è vero: ad esempio, S^1 è connesso per archi ma non è convesso. Analogamente, una corona circolare è connessa per archi ma non convessa.



Sia ora X uno spazio topologico connesso per archi e $x \in X$ un punto qualsiasi. Siccome per ogni $y \in X$ esiste un arco $\alpha_y : I \longrightarrow X$, $\alpha_y(0) = x$, $\alpha_y(1) = y$, posso scrivere

$$X = \bigcup_{y \in X} \alpha_y(I)$$



Ogni $\alpha_y(I)$ è immagine continua di I che è connesso, dunque $\alpha_y(I)$ è connesso $\forall y$

Siccome $\{x\} \subseteq \bigcap_{y \in X} d_y(I)$, segue che $\bigcap_{y \in X} d_y(I) \neq \emptyset$

Allora X è connesso. Abbiamo dunque dimostrato che

> **Ogni spazio topologico connesso per archi è connesso**

Il viceversa non è vero: esistono esempi di spazi topologici connessi ma non connessi per archi, li vedremo più in là.

Sia ora X uno spazio topologico e $x_0 \in X$.
L'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di X che contengono x_0 è chiamata la componente connessa di x_0 in X, indicata con C_{x_0}.

Proposizione C_{x_0} è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente x_0. In altre parole, C_{x_0} è connesso e se $Y \subseteq X$ è un connesso contenente x_0, allora $Y \subseteq C_{x_0}$.

Dimostrazione Siccome

$$C_{x_0} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ connesso} \\ x_0 \in Y}} Y$$

c'è solo da dimostrare che C_{x_0} è connesso.
Questo segue dal fatto che ogni Y nell'unione è connesso e dal fatto che
il sottoinsieme $\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ connesso} \\ x_0 \in Y}} Y$ è non vuoto, in quanto esso contiene x_0 ∎

Esempio 1 Se X è connesso, allora $\forall x_0 \in X$ si ha

$$C_{x_0} = X$$

Esempio 2 Sia $X = (0,1) \cup [2,3] \cup \{5\}$

Allora la componente connessa di $1/2$ è $(0,1)$, la componente connessa di 2 è $[2,3]$ e la componente connessa di 5 è $\{5\}$.

Esempio 3 Sia X uno spazio topologico discreto.

Allora ogni sottoinsieme fatto da almeno due punti è sconnesso, dunque $\forall x_0 \in X$ si ha

$$C_{x_0} = \{x_0\}$$

Esempio 4 Sia $X = \mathbb{Q}$ con la topologia euclidea.

Allora ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ costituito da almeno due punti è sconnesso, dunque $\forall q \in \mathbb{Q}$ si ha

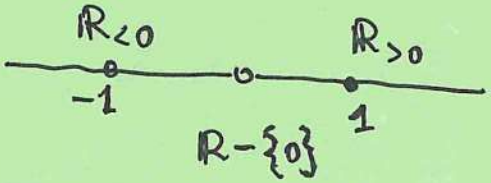
$$C_q = \{q\}$$

Si noti che $\mathbb{Q}$ non ha la topologia discreta (nessun punto di $\mathbb{Q}$ è isolato).

Esempio di spazio totalmente sconnesso

$\forall x_0 \in X$
$C_{x_0} = \{x_0\}$

Esempio 5 $\mathbb{R} - \{0\}$ non è connesso ed è unione disgiunta di $\mathbb{R}_{>0}$ (la componente connessa di 1) e $\mathbb{R}_{<0}$ (la componente connessa di -1)



Lemma Sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme denso.
Se D è connesso, allora X è connesso.

Dim Supponiamo per assurdo che X sia sconnesso, e siano A, B aperti non vuoti di X tali che

$$X = A \cup B$$

Siccome D è denso in X, esso interseca ogni aperto non vuoto di X. Pertanto $D \cap A$ e $D \cap B$ sono entrambi aperti non vuoti di D, e posso scrivere

$$D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$$

Questo vuol dire che D è sconnesso, contraddizione. ∎

Oss Il viceversa del Lemma precedente non vale.
In altre parole, può succedere che $D \subseteq X$ sia denso e sconnesso, ma che X sia connesso.
Ad esempio, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è denso e (totalmente) sconnesso, ma $\mathbb{R}$ è connesso.

Proposizione Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme connesso di X. Allora ogni sottoinsieme Z di X tale che

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$$

è connesso. In particolare, se Y è connesso allora la sua chiusura $\overline{Y}$ è anche connessa.

Dim Vedendo Y come sottospazio di Z, la chiusura di Y in Z è data da

$$\overline{Y}^Z = \overline{Y} \cap Z = Z, \text{ dunque } Y \text{ è denso in } Z \text{ e il}$$

risultato segue dal Lemma precedente ∎

Corollario Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$.
Allora la componente connessa C_{x_0} di x_0 in X è un sottoinsieme chiuso di X

Dim Siccome C_{x_0} è connesso, la sua chiusura $\overline{C}_{x_0}$ è anche connessa (Proposizione precedente). Ma C_{x_0} è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente x_0, dunque dobbiamo avere $\overline{C}_{x_0} \subseteq C_{x_0}$. D'altra parte, si ha ovviamente $C_{x_0} \subseteq \overline{C}_{x_0}$, dunque

$C_{x_0} = \overline{C}_{x_0}$, cioè C_{x_0} è chiuso in X ∎

Oss 1 In generale, non è vero che C_{x_0} sia anche aperta in X. Ad esempio, se $X = \mathbb{Q}$ e $x_0 \in \mathbb{Q}$ si ha $C_{x_0} = \{x_0\}$, e un punto in $\mathbb{Q}$ è chiuso ma non è aperto (nessun punto di $\mathbb{Q}$ è isolato).

Def Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è detto una componente connessa di X se esso è una componente connessa di qualche punto, ossia se esiste $x_0 \in X$ tale che $C = C_{x_0}$.

Oss 2 Ogni spazio topologico è unione disgiunta delle sue componenti connesse.
Infatti, per quanto visto ogni punto $x_0 \in X$ appartiene ad almeno una componente connessa C (basta prendere $C = C_{x_0}$).

Siano ora C e D due componenti connesse di X, e supponiamo che $C \cap D \neq \emptyset$. Siccome C e D sono entrambi connessi, questo implica che $C \cup D$ è connesso. Ovviamente

$$C \subseteq C \cup D, \quad D \subseteq C \cup D$$

e siccome C e D sono sottospazi connessi di X massimali per l'inclusione, questo vuol dire $C = C \cup D$ e $D = C \cup D$, ossia $C = D$.

Ad esempio, $\mathbb{R} - \{0\} = C_{-1} \cup C_1$, dove $C_{-1} = \mathbb{R}_{<0}$, $C_1 = \mathbb{R}_{>0}$

Osserviamo che, in questo esempio, le componenti connesse sono non solo chiuse, ma anche aperte. È dunque naturale chiedersi sotto quali condizioni le componenti connesse siano aperte. Una risposta viene dalla seguente:

Proposizione Sia X uno spazio topologico tale che ogni punto $x \in X$ possieda un intorno connesso. Allora ogni componente connessa $C \subseteq X$ è sia aperta che chiusa.

In realtà vale anche il viceversa

Infatti, se ogni componente connessa è aperta, allora dato $x_0 \in X$ la componente che C_{x_0} è un intorno (aperto) connesso di x

Dim Sia $C \subseteq X$ una componente connessa e sia $x \in C$. Sia U un intorno connesso di x, che esiste per ipotesi. Siccome $x \in C \cap U$ ed entrambi C e U sono connessi, segue che $C \cup U$ è un sottoinsieme connesso di X, contenente x. Siccome $x \in C$ segue $C = C_x$, e pertanto

$$C \cup U \subseteq C$$

(essendo C_x il più grande connesso di X contenente x). Ma allora $x \in U \subseteq C$, dunque C è intorno di x.

Dato che $x \in C$ è stato scelto arbitrariamente, segue che C è intorno di ogni suo punto e dunque è connesso. □

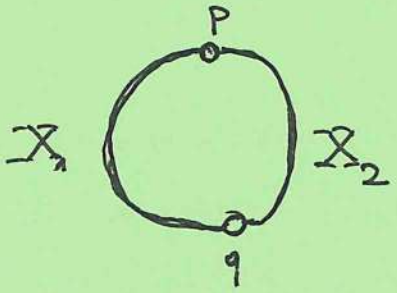
Es 1. Le due componenti connesse di

$$X = (0,1) \cup [2,3]$$

sono entrambe sia aperte che chiuse in X.

Es 2. Sia $X = S^1 - \{p, q\}$, dove $p, q \in S^1$ sono due punti distinti.

Lo spazio X chiaramente verifica l'ipotesi della proposizione precedente. Esso ha due componenti connesse X_1 e X_2, che sono allora sia aperte che chiuse in X.



$$X = X_1 \cup X_2$$

Es 3. Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i punti, che sono chiusi ma non aperti. Si noti che $\mathbb{Q}$ non verifica l'ipotesi della Proposizione precedente (nessun punto di $\mathbb{Q}$ possiede un intorno connesso).

Osservazione Se X è uno spazio topologico, la relazione

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \text{esiste un connesso } C \subseteq X \text{ con } x, y \in C$$

è una relazione d'equivalenza su X (esercizio!)

Le classi d'equivalenza di tale relazione sono le componenti connesse di X.

Oss Ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse, pertanto due spazi omeomorfi devono avere lo stesso numero di componenti connesse.

Ad esempio, $\mathbb{R}-\{0\}$ e $\mathbb{R}-\{0,1\}$ non sono omeomorfi: infatti $\mathbb{R}-\{0\}$ contiene due componenti connesse, $\mathbb{R}-\{0,1\}$ ne contiene tre.

Oss Abbiamo visto che, in generale, le componenti connesse di uno spazio topologico X sono chiuse ma non aperte. Vale però la

Proposizione Se Y è un sottoinsieme connesso (non vuoto) di X, tale che Y sia simultaneamente aperto e chiuso, allora Y è una componente connessa di X.

Dim Basta provare che se $Z \supseteq Y$ e Z è connesso, allora $Z = Y$. Infatti, consideriamo Z con la topologia indotta. Allora Y, visto come sottospazio di Z, è simultaneamente aperto e chiuso in Z. Essendo Z connesso, deve essere $Z = Y$. ∎

- Esempio di spazio connesso ma non ~~[illegible]~~ connesso per archi

- La pulce e il pettine.

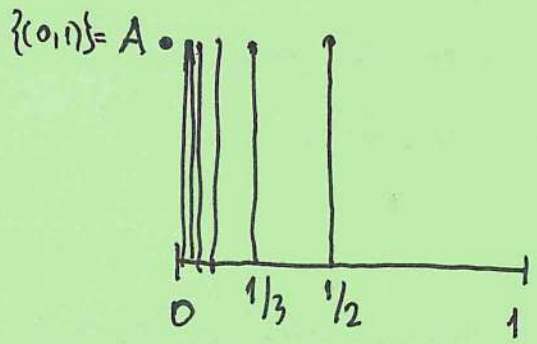
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme definito da $X = A \cup B$ dove

$$A = \{(0,1)\} \qquad \text{(la pulce)}$$

$$B = [0,1] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \qquad \text{(il pettine)}$$

dove $D_n = \left\{ \left(\frac{1}{n}, t\right) \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$

$[0,1]$ = base del pettine
D_n = denti del pettine.



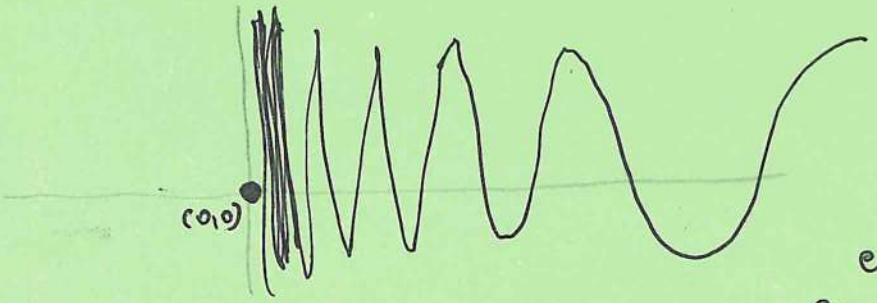
Ho una famiglia numerabile di denti che si accumula sull'asse y.

Si dimostra che X è connesso, ma che l'unico arco in X con punto iniziale $(0,1)$ è l'arco costante: dunque X non è connesso per archi.

Dettagli e dimostrazione: Kosniowski, p. 105-106.

- The topologist sine curve

$$X = \{(x, \sin 1/x) \mid x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$$



Man mano che ci si avvicina a $x=0$, la frequenza di oscillazione di $\sin 1/x$ aumenta.

Si dimostra che X è connesso, ma non connesso per archi (l'unico arco con punto iniziale $(0,0)$ è l'arco banale

Spazi compatti

Definizione Un *ricoprimento* di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi tali che

$$X = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Diremo che il ricoprimento $\mathcal{A}$ è *finito* se $\mathcal{A}$ è una famiglia finita, *numerabile* se $\mathcal{A}$ è una famiglia numerabile.

Diremo che il ricoprimento $\mathcal{A}$ è *aperto* se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto in X, e diremo che $\mathcal{A}$ è *chiuso* se ogni $A \in \mathcal{A}$ è un chiuso di X.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimenti di X con $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, diremo che $\mathcal{B}$ è un *sottoricoprimento* di $\mathcal{A}$

Definizione (Spazio Compatto)

Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Un sottospazio $Y \subseteq X$ di uno spazio topologico X si dice compatto se è compatto per la topologia indotta

Equivalentemente, un sottospazio $K \subset X$ di uno spazio topologico X è compatto se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tale che $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$K \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$$

- **Esempio 1** Sia X uno spazio topologico discreto.
  Allora X è compatto $\iff$ X è finito.
  (Infatti, siccome X è discreto, i punti sono aperti in X)

- **Esempio 2** Ogni spazio topologico finito è compatto, qualunque sia la sua topologia.

• Esempio 3 Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea.

Allora $\mathbb{R}^n$ non è compatto. Infatti possiamo estrarre un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$ che non ammette nessun sottoricoprimento finito: sia

$$\mathcal{A} = \{ B(0,r) \mid r \in \mathbb{N} \}$$

Allora $$\mathbb{R}^n = \bigcup_{r=1}^{+\infty} B(0,r) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Tuttavia, $\mathcal{A}$ non possiede nessun sottoricoprimento finito. Infatti, presi

$$B(0,r_1), \dots, B(0,r_k) \in \mathcal{A}$$

si ha $$B(0,r_1) \cup \dots \cup B(0,r_k) = B(0, \max\{r_1, \dots, r_k\}) \neq \mathbb{R}^n.$$

• Esempio 4 Se (X,τ) è compatto e τ' è meno fine di τ, allora (X,τ') è compatto.

[Teorema L'intervallo chiuso $[0,1]$ è un sottospazio compatto della retta reale $\mathbb{R}$.]

Dim [Manetti] Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ tale che

$$[0,1] \subset \bigcup \{ A \mid A \in \mathcal{A} \}$$

Indichiamo con $X \subset [0,+\infty)$ l'insieme dei punti t tali che l'intervallo chiuso $[0,t]$ è contenuto nell'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{A}$.

L'intervallo $[0,0] = \{0\}$ è contenuto in un aperto di $\mathcal{A}$, quindi $0 \in X$. Sia dunque $b \geq 0$ l'estremo superiore di X.

Abbiamo due casi da considerare.

Caso 1 $b \geq 1$. In tal caso esiste $t \in X$ con $1 \leq t \leq b$, e quindi $[0,t]$ è contenuto nell'unione di un numero

finito di aperti di A. Ma allora $[0,1] \subseteq [0,t]$ è anch'esso contenuto nell'unione finita di aperti di $\mathcal{A}$, dunque $[0,1]$ è compatto.

Caso 2 $b < 1$. Voglio mostrare che questo caso conduce ad una contraddizione. In tal modo la dimostrazione sarà completa. Infatti, se $b \leq 1$ allora $b \in [0,1]$, pertanto esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$. Siccome A è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(b-\delta, b+\delta) \subset A$$

D'altra parte, per le proprietà dell'estremo superiore, esiste $t \in X$ tale che

$$b - \delta < t \leq b.$$

Segue dalla definizione di X che l'intervallo $[0,t]$ è contenuto in un'unione finita di aperti del ricoprimento $\mathcal{A}$, diciamo

$$[0,t] \subset A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Dunque, se $0 < h < \delta$, allora

$$[0, b+h] = [0,t] \cup [t, b+h] \subset [0,t] \cup (b-\delta, b+\delta)$$
$$\subset A_1 \cup \dots \cup A_m \cup A$$

Cioè $[0, b+h]$ è contenuto nell'unione di un insieme finito di elementi di $\mathcal{A}$. Per definizione, ciò vuol dire

$$b + h \in X,$$

contraddizione in quanto $\sup X = b < b+h$. ∎

Oss $(0,1)$ non è compatto. Infatti $\left\{\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right)\right\}_{m \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto che non ammette nessun sottoricoprimento finito.

Il prossimo risultato mostra che la compattezza è una proprietà topologica.

Teorema Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, allora la sua immagine $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y.

In particolare, se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo,

X è compatto $\Leftrightarrow$ Y è compatto.

Dim Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di Y che ricoprono $f(X)$. Allora la famiglia

$$f^{-1}\mathcal{A} := \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A} \}$$

è un ricoprimento aperto di X. Siccome X è compatto, posso estrarre da essa un sottoricoprimento finito. Ciò vuol dire che esistono $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ tali che

$$X \subset f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_N)$$

Ma allora

$$f(X) \subset A_1 \cup \dots \cup A_N,$$

il che mostra la compattezza di $f(X)$. ∎

Esempio $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $[0,1]$. Infatti $\mathbb{R}$ non è compatto, mentre $[0,1]$ è compatto.

Proposizione

(1) Ogni sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.

(2) L'unione finita di sottospazi compatti è compatta.

Dim (1) Sia X compatto e $Y \subseteq X$ un sottospazio chiuso. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di X tale che

$$Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Siccome Y è chiuso, $X - Y$ è aperto in X, dunque

$\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$ è un ricoprimento aperto di X

$$X = \left(\bigcup_{a \in \mathcal{A}} A\right) \cup \{X - Y\}$$

Essendo X per ipotesi compatto, tale ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito. Dunque possiamo trovare $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ tali che

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_N \cup \{X - Y\}.$$

Ma allora $Y \subset A_1 \cup \dots \cup A_N$, cioè Y è compatto.

(2) Siano $K_1, \dots, K_t$ sottospazi compatti di X e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di X tale che

$$K_1 \cup \dots \cup K_t \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Ma allora $K_1 \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \dots, K_t \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} A$.

Siccome $K_1, \dots, K_t$ sono compatti, posso trovare

$A_{11}, \dots, A_{1m_1} \in \mathcal{A}$ tali che $K_1 \subset A_{11} \cup \dots \cup A_{1m_1}$

$A_{21}, \dots, A_{2m_2} \in \mathcal{A}$ tali che $K_2 \subset A_{21} \cup \dots \cup A_{2m_2}$

$\vdots$

$A_{t1}, \dots, A_{tm_t} \in \mathcal{A}$ tali che $K_t \subset A_{t1} \cup \dots \cup A_{tm_t}$.

Dunque

$$K_1 \cup \dots \cup K_t \subset \bigcup_{\substack{1 \le i \le t \\ 1 \le j \le m_i}} A_{ij}$$

■

Il seguente corollario caratterizza i compatti di $\mathbb{R}$.

Corollario (Heine-Borel: caso speciale)
Un sottospazio $X \subset \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

- Ad esempio:
- $\mathbb{Q}$ non è compatto
- $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto
- S^1 è compatto
- Il toro è compatto (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^3$)

Dim Sia $X \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato. Allora

$$X \subset [-a, a]$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$. L'intervallo $[-a, a]$ è compatto, dunque X, essendo chiuso in un compatto, è anch'esso compatto.

Viceversa, sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme compatto. La famiglia di aperti $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n = (-n, n)$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$, dunque posso trovare un insieme finito di indici $n_1, \dots, n_k$ tali che

$$X \subset (-n_1, n_1) \cup \dots \cup (-n_k, n_k)$$

Ma allora, posto $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, segue

$\overline{X} \subset (-N, N)$,

cioè $\overline{X}$ è limitato.

Resta solo da mostrare che $\overline{X}$ è chiuso. Consideriamo l'applicazione continua

$$f : \mathbb{R} - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x - p}$$

dove p è un punto fissato tale che $p \notin \overline{X}$.

Allora $X \subset \mathbb{R} - \{p\}$, dunque $f(X)$ è compatto, pertanto limitato (per quanto dimostrato sopra).

Necessariamente allora $p \notin \overline{X}$, in altre parole

$$p \notin X \Rightarrow p \notin \overline{X}$$

La controinversa dà $p \in \overline{X} \Rightarrow p \in X$, e siccome ciò è vero $\forall p \in \overline{X}$ si ottiene $\overline{X} \subseteq X$. Dunque $\overline{X} = X$, cioè X è chiuso. ∎

se per assurdo $p \in \overline{X}$, allora $x_n \to p$ con $|x_n| < N$. Allora $\lim |x_n| = +\infty$ in contraddizione con il fatto che X è limitato

Corollario (Teorema di Weierstrass)

Sia X uno spazio topologico compatto. Allora ogni funzione continua

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

ammette massimo e minimo.

Dim L'immagine $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatta, dunque chiusa e limitata per Heine-Borel. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo. ∎

Oss Il Teorema di Heine-Borel vale più in generale in $\mathbb{R}^n$, e vediamo la dimostrazione più avanti

Proposizione Sia $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ una catena discendente (numerabile) di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora

$$\bigcap \{ K_n \mid n \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$$

Dim Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K_1 - K_n$ è aperto in K_1 - Osserviamo che

$$(K_1 - K_1) \cup (K_1 - K_2) \cup \dots \cup (K_1 - K_n) \cup \dots$$

$$= K_1 - \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \right)$$

dunque $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \emptyset \iff$ Gli aperti $\{K_1 - K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ formano un ricoprimento di K_1

Se per assurdo ciò accade, essendo K_1 compatto posso estrarre un sottoricoprimento finito, ossia

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{t} (K_1 - K_{n_j})$$

Ciò vuol dire che

$$\bigcap_{j=1}^{t} K_{n_j} = \emptyset$$

ma ciò è assurdo, dato che tale intersezione è $K_{n_t} \neq \emptyset$ ∎

Siano X, Y spazi topologici e $A \subset X$, $B \subset Y$ due sottoinsiemi. Allora $X \times Y$ è sottoinsieme di $A \times B$, ed è possibile definire una topologia su $X \times Y$ in due modi distinti:

1. Vedendo $A \times B$ come sottospazio di $X \times Y$
2. Vedendo $A \times B$ come prodotto del sottospazio A per il sottospazio B.

Tuttavia, è facile verificare che le due procedure danno luogo alla stessa topologia (esercizio)

Se A e B sono compatti, vale il seguente risultato che Manetti chiama "Teorema di Wallace".

Proposizione Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subset W$. Allora esistono due aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ tali che

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \times V \subset W$$

Dim [Manetti, p. 75]

Corollario Ogni sottospazio compatto di uno spazio topologico di Hausdorff è chiuso.

Dim Sia X uno spazio di Hausdorff e $K \subset X$ un sottospazio compatto. Per mostrare che K è chiuso proviamo che $X - K$ è aperto; per fare ciò, basta mostrare che se $x \notin K$, allora esiste un aperto U di X tale che $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$.

Ricordiamo che, essendo X uno spazio di Hausdorff, la diagonale $\Delta \subset X \times X$ è chiusa in $X \times X$. D'altra parte, il fatto che $x \notin K$ implica che $\{x\} \times K$ non interseca la diagonale Δ, ossia $\{x\} \times K \subset W$, dove $W = (X \times X) \setminus \Delta$ è aperto.

Per il Teorema di Wallace, siccome $\{x\}$ e K sono entrambi compatti in X, esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che

$$\{x\} \times K \subset U \times V \subset W$$

In particolare, $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$. ∎

Corollario 2 Siano X, Y spazi topologici.

(1) Se X è compatto, allora la proiezione

$$p : X \times Y \longrightarrow Y$$

è un'applicazione chiusa

(2) $X \times Y$ è compatto se e solo se entrambi X e Y sono compatti.

Dim

(1) Sia $C \subseteq X \times Y$ un sottoinsieme chiuso. Voglio dimostrare che $p(C)$ è un chiuso. Se $p(C) = Y$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, sia $y \notin p(C)$ e mostriamo che il punto y possiede un intorno che non interseca $p(C)$ (in altre parole, dimostriamo che $Y - p(C)$ è aperto).

Osserviamo che $y \notin p(C)$ vuol dire $(X \times \{y\}) \cap C = \emptyset$, ossia $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) - C$

Siccome C è chiuso, l'insieme $(X \times Y) - C$ è aperto; allora per il Teorema di Wallace esiste un aperto V contenente y tale che $X \times V \subseteq (X \times Y) - C$, ossia

$$(X \times V) \cap C = \emptyset,$$ e applicando p si ha

$$V \cap p(C) = \emptyset$$

come volevamo

(2) $\overset{(\Rightarrow)}{}$ Se $X \times Y$ è compatto, allora X e Y sono anch'essi compatti dato che $p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$ sono continue e surgettive.

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo che X e Y siano compatti e deduciamo che il prodotto $X \times Y$ è compatto.

Consideriamo la proiezione

$$p : X \times Y \longrightarrow Y.$$

Per quanto visto nella parte (1), p è un'applicazione chiusa.

Per ogni aperto $A \subset X \times Y$ definiamo

$$A' = \{ y \in Y \mid p^{-1}(y) \subset A \} \subseteq Y$$

dove notiamo che $p^{-1}(y) = X \times \{y\} \cong X$ è compatto.

Notiamo che

$$Y - A' = p\left((X \times Y) - A \right)$$

Poiché $A \subset X \times Y$ è ~~chiuso~~ aperto, $(X \times Y) - A$ è chiuso, ed essendo p un'applicazione chiusa deduciamo che $Y - A'$ è un chiuso di Y, dunque $A' \subseteq Y$ è aperto $\leftarrow$

Sia ora $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$ e sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le possibili unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$. Sia poi

$$\mathcal{B}' = \{ B' \mid B \in \mathcal{B} \}$$

Affermo che $\mathcal{B}'$ è un ricoprimento aperto di Y. Infatti, preso $y \in Y$, la fibra $p^{-1}(y)$ è compatta e dunque esistono $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che $p^{-1}(y) \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$; allora $y \in B'$, dove $B = A_1 \cup \dots \cup A_m$.

Dato che Y è compatto per ipotesi, posso estrarre dal ricoprimento aperto $\mathcal{B}'$ un sottoricoprimento finito; dunque esistono $B_1, \dots, B_n$ in $\mathcal{B}$ tali che $Y = B_1' \cup \dots \cup B_n'$. Allora

$$X \times Y = B_1 \cup \dots \cup B_n,$$ e poiché ogni B_i

è unione finita di elementi di $\mathcal{A}$, abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$. ∎

Osservazioni

(1) Il Corollario 1 è falso senza l'ipotesi che lo spazio topologico sia di Hausdorff. Ad esempio, se X ha la topologia cofinita allora ogni sottoinsieme è compatto (vedere foglio di Esercizi 4), dunque un compatto di X non è necessariamente chiuso in questo caso.

(2) Nel Corollario 2, parte (1), la conclusione non è vera se X non è compatto. Ad esempio, sia $X = \mathbb{R}$ e sia $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il sottoinsieme chiuso definito da $C = \{(x,y) \mid xy - 1 = 0\}$. Allora $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p(C) = \mathbb{R} - \{0\}$ che non è chiuso in $\mathbb{R}$, ossia p non è chiusa in questo caso.

(3) La stessa dimostrazione del Corollario 2, parte (2) permette di dimostrare il seguente risultato:

> Proposizione
> Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione chiusa.
> Se Y è compatto e se $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$, allora anche X è compatto.

(4) Per induzione si dimostra facilmente che il prodotto di un numero finito di spazi compatti è compatto.

Proposizione (Heine-Borel in $\mathbb{R}^n$)
Un sottospazio $X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

($\Leftarrow$)

Dim Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Poiché X è limitato, X è contenuto in un ipercubo della forma $[-a,a]^n$, per un certo $a \in \mathbb{R}$. Poiché $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ è compatto, il prodotto $[-a,a]^n$ che ne copre che esso è anche compatto. Dunque X, essendo chiuso in un compatto, è compatto

($\Rightarrow$) Viceversa, sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio compatto.
Allora la funzione

$$d_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_0(x) = \|x\|$$

è continua e dunque ammette massimo, ciò vuol dire che X è limitato. Inoltre $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Hausdorff, dunque X compatto implica X chiuso. ∎

Esempi

- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e le palle chiuse $\overline{B}^n = \overline{B(0,r)} \subset \mathbb{R}^n$ sono compatte, in quanto chiuse e limitate nello spazio euclideo.
- Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ (e in generale l'n-toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ fattori}}$) è compatto, in quanto S^1 è compatto e il prodotto finito di spazi compatti è compatto.

Proposizione Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua, con X compatto e Y di Hausdorff. Allora f è un'applicazione chiusa. Se f è anche biettiva, allora f è un omeomorfismo.

Dim Sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Poiché X è compatto, C è anch'esso compatto, e poiché f è continua, segue che $f(C)$ è compatto. Dato che Y è di Hausdorff, $f(C)$ è chiuso, pertanto f è un'applicazione chiusa.
Se f è biettiva, essendo anche continua e chiusa è necessariamente un omeomorfismo. ∎

Oss Le ipotesi della Proposizione sono necessarie.
Ad esempio, abbiamo visto che l'applicazione

$$f: [0,1) \longrightarrow S^1$$
$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

è continua e biettiva ma non un omeomorfismo.
Infatti non è chiusa - si noti che S^1 è di Hausdorff, ma $[0,1)$ non è compatto.

Compattezza per successioni

"L. Geymonat "Elementary Topology"

Dove

X è "2-numerabile".

Definizione Uno spazio topologico X si dice a base numerabile se esiste una base della topologia formata da una quantità numerabile di aperti.

A volte si usa la locuzione "secondo assioma di numerabilità" per indicare la proprietà di essere a base numerabile.

Esempio 1 La retta euclidea $\mathbb{R}$ è a base numerabile. Infatti la famiglia

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

è numerabile ed è una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

Esempio 2

- Se X è a base numerabile, ogni sottospazio $Y \subseteq X$ è anche a base numerabile.
- Se $X_1, \dots, X_n$ sono a base numerabile, lo spazio prodotto $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ è anche a base numerabile.

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice separabile se contiene un sottoinsieme $Y \subseteq X$ denso e numerabile.

Proposizione

(1) Ogni spazio topologico X a base numerabile è separabile.

(2) Se X è metrizzabile e separabile, allora è a base numerabile.

Dim

(1) Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X,

$$\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $y_n \in B_n$. Allora l'insieme $Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme numerabile di X.

Affermo che $\overline{Y} = X$, ora che Y è denso in X. Infatti, sia $A \subseteq X$ un aperto non vuoto. Allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

$$B_n \subseteq A,$$

dunque $y_n \in B_n \subseteq A$, cioè $A \cap Y \neq \emptyset$. Poiché Y interseca ogni aperto non vuoto di X, è denso in X.

(2) Sia $d: X \times X \to \mathbb{R}$ una metrica su X che induce la topologia data e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme denso e numerabile.

$$Y = \{ y_m \mid m \in \mathbb{N} \}$$

Consideriamo ora la famiglia numerabile di palle aperte

$$\mathcal{B} = \{ B(y_m, \tfrac{1}{2^n}) \mid m, n \in \mathbb{N} \}$$

Affermo che $\mathcal{B}$ è una base della topologia di X.
Infatti sia $U \subseteq X$ un aperto ~~xxxxxx~~; devo dimostrare che $\forall x \in U$ esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in B(y_m, \frac{1}{2^n}) \subset U$

Sia $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ tale che $B(x, \frac{1}{2^{n-1}}) \subset U$.

Poiché Y è denso, esiste $y_m \in Y \cap B(x, \frac{1}{2^n})$, dunque in particolare $y_m \in B(x, \frac{1}{2^n})$. Questo significa $x \in B(y_m, \frac{1}{2^n})$, per simmetria della funzione distanza d.
A questo punto sia y un qualsiasi punto di $B(y_m, \frac{1}{2^n})$.
Allora per la disuguaglianza triangolare

$$d(y, x) \leq d(y, y_m) + d(y_m, x)$$
$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

cioè $y \in B(x, \frac{1}{2^{n-1}})$. Allora

$$x \in B(y_m, \tfrac{1}{2^n}) \subset B(x, \tfrac{1}{2^{n-1}}) \subset U,$$ il che conclude la dimostrazione

Esempio 1 Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni $\{a_n\}$ di numeri reali tali che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$.

$\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico con la distanza

$$d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2}$$

Affermo che $\ell^2(\mathbb{R})$ è separabile. Infatti, sia

$Y \subset \ell^2(\mathbb{R})$ il sottoinsieme numerabile

dato dalle successioni di numeri razionali che sono definitivamente nulle.

$$Y = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, \dots 0, \dots) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{Q}, \\ a_i = 0 \text{ per } i > N \end{array} \right\}$$

Affermo che Y è denso in $\ell^2(\mathbb{R})$. Basta mostrare che data una qualsiasi successione $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$ e un qualsiasi $\varepsilon > 0$, posso trovare $\{b_n\} \in Y$ tale che

$$d(\{a_n\}, \{b_n\}) < \varepsilon$$

Infatti, siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, posso trovare $N > 0$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n^2 < \varepsilon^2/2$$

e numeri razionali $b_1, \dots, b_N$ tali che $(a_n - b_n)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{2N}$ per ogni $1 \le n \le N$. Allora, posto $b_n = 0$ per $n > N$ la successione

$$\{b_n\} = b_1, \dots, b_N, 0, 0, \dots$$

è un elemento di Y e si ha:

$$d(\{a_n\},\{b_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-b_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}(a_n-b_n)^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty}(a_n-b_n)^2}$$

$$< \sqrt{N\cdot\frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

e la dimostrazione è completa.

Dunque $l^2(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico separabile, pertanto esso è a base numerabile ed una base numerabile può essere costruita nella maniera spiegata nella dimostrazione della proposizione precedente.

Esempio 2 Sia $\mathbb{R}_{Sf}$ la retta di Sorgenfrey.
Allora $\mathbb{R}_{Sf}$ è separabile: infatti $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}_{Sf}$, in quanto $\mathbb{Q}$ interseca ogni elemento della base di aperti

$$\{[a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

di $\mathbb{R}_{Sf}$.
Ora mostriamo che $\mathbb{R}_{Sf}$ non è a base numerabile.
Infatti sia $\mathcal{B}$ una base di aperti di $\mathbb{R}_{Sf}$. Per ogni $x\in\mathbb{R}_{Sf}$ l'insieme $[x,+\infty)$ è un aperto contenente x, dunque esiste un aperto $U_x\in\mathcal{B}$, con $x\in U_x$, tale che

$$U_x \subseteq [x,+\infty).$$

Notiamo che se $y<x$ allora $y\notin[x,+\infty)$, dunque $y\notin U_x$.
Ciò mostra che $U_x\neq U_y$ se $x\neq y$. Ma allora l'applicazione

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{Sf} &\longrightarrow \mathcal{B}\\ x &\longrightarrow U_x\end{aligned}$$

è iniettiva. Poiché $\mathbb{R}_{Sf}$ è non numerabile, segue che $\mathcal{B}$ è non numerabile

Dunque R_{sf} è separabile, ma non è a base numerabile.
Per la parte (2) della proposizione precedente segue allora che

$$\boxed{\mathbb{R}_{sf} \text{ è non metrizzabile}}$$

Dunque la retta di Sorgenfrey fornisce un esempio di spazio topologico di Hausdorff la cui topologia non è indotta da una distanza. ↯

Questo è il primo esempio di spazio T_2 e non metrizzabile che incontriamo.

Def (Primo assioma di numerabilità)
Sia X uno spazio topologico. Diremo che "X ha un sistema fondamentale di intorni numerabile per ogni $x \in X$", o equivalentemente che X soddisfa il primo assioma di numerabilità (anche che "X è 1-numerabile") se ogni punto $x \in X$ ha una famiglia numerabile di intorni

$$\mathcal{U}(x) = \{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

tale che per ogni intorno V di x esiste $n \in \mathbb{N}$ con $U_n \subseteq V$.

Oss. Non è restrittivo supporre che la famiglia $\{U_n\}$ sia *inscatolata*, cioè che

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots$$

Infatti, a partire da ogni famiglia numerabile di intorni di x si può ottenere una famiglia inscatolata sostituendo

$$\begin{aligned} U_1 &\text{ con } U_1 \\ U_2 &\text{ con } U_1 \cap U_2 \\ &\vdots \\ U_n &\text{ con } U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esempio di spazio non 1-numerabile
Uno insieme non numerabile dotato della topologia cofinita
(Dimostrazione a p. 144-2)

Se la famiglia $\{U_n\}$ è nested (cosa che d'ora in poi tacitamente supponiamo) allora l'ultima condizione nella definizione del 1° assioma di numerabilità diventa

"Per ogni intorno V di x esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $U_m \subseteq V$ per ogni $m \geq n$"

Prop Ogni spazio metrico X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Dim Se $x \in X$, la famiglia di palle aperte

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

è un sistema fondamentale numerabile di intorni di x. ∎

Prop Ogni spazio 2- numerabile è anche 1- numerabile. Il viceversa è falso in generale.

Dim Sia $\mathcal{B} = \{ B_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ una base numerabile di aperti per X. Allora

$$\mathcal{U}(x) := \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile di x.

Per mostrare che il viceversa è falso in generale, basta considerare la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_{sf}$. Abbiamo dimostrato che essa non è 2- numerabile, tuttavia è 1- numerabile dato

che per ogni $x \in \mathbb{R}_{sf}$, la famiglia

$$\left\{ \left[x, x + \frac{1}{2^n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

è un sistema fondamentale numerabile di intorni di x.

Successioni

Def (1) Una <u>successione</u> in uno spazio topologico X è un'applicazione

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

Come è consuetudine, scriveremo a_n invece di $a(n)$.

(2) Sia $\{a_n\}$ una successione in uno spazio topologico X. Diremo che $\{a_n\}$ <u>converge</u> ad un punto $p \in X$ (o <u>ha per limite</u> p) se per ogni intorno U di p esiste $N > 0$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq N$. In tal caso scriveremo

$$a_n \xrightarrow[n]{} p \quad \text{oppure} \quad \lim_n a_n = p.$$

Come visto in uno degli esempi, se X è uno spazio di Hausdorff (ad esempio, uno spazio metrico) allora $\{a_n\}$ converge ad al più un punto, ed $\lim_n a_n$ se esiste è unico.

Proposizione (Limiti di successioni in spazi 1-numerabili)
Sia X uno spazio topologico 1-numerabile e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Per un punto $x \in X$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) Esiste una successione $\{a_n\}$ a valori in A tale che $a_n \to x$

(2) $x \in \overline{A}$

Dim

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia U un qualsiasi intorno di x in X. Voglio mostrare che $U \cap A \neq \emptyset$. Siccome esiste $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ e $a_n \to x$, per definizione di limite segue che esiste $N > 0$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq N$, dunque

$$a_n \in A \cap U \quad \forall\, n \geq N$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sia $x \in \overline{A}$ e consideriamo un sistema fondamentale numerabile di intorni aperti di x

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \dots$$

L'ipotesi $x \in \overline{A}$ implica che A interseca ogni intorno di x, dunque in particolare $A \cap U_i \neq \emptyset$ per ogni i.

Allora possiamo scegliere

$$x_1 \in A \cap U_1$$
$$x_2 \in A \cap U_2 \qquad \text{dunque } \{x_n\} \subset A$$
$$\vdots$$
$$x_n \in A \cap U_n$$
$$\vdots$$

Affermo che $x_n \to x$. Infatti sia V un intorno di x; allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $U_N \subseteq V$, quindi $U_n \subseteq V$ per ogni $n \geq N$. Allora $x_n \in V$ per ogni $n \geq N$, il che conclude la dimostrazione ∎

Dunque negli spazi topologici 1-numerabili le successioni convergenti bastano a caratterizzare le chiusure.
Ad esempio, se $A \subset X$ e X è 1-numerabile, allora A è chiuso se e solo se A contiene tutti i limiti delle sue successioni convergenti, in altre parole se e solo se

$$\{x_n\} \subset A \text{ e } x_n \to x \implies x \in A$$

↑ caratterizzazione dell'essere chiuso in uno spazio X 1-numerabile.

In particolare ciò vale in uno spazio metrico, dato che ogni spazio metrico, essendo 2-numerabile, è anche 1-numerabile.

Spazi di Lindelöf

Def Uno spazio topologico X si dice "spazio di Lindelöf" se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

ES 1 Ogni spazio compatto è di Lindelöf. Vedremo che il viceversa è falso.

ES 2 Uno spazio discreto X è di Lindelöf se e solo se è numerabile (dunque, ad esempio, $\mathbb{R}$ con la topologia discreta non è di Lindelöf)

Proposizione Ogni spazio topologico X 2-numerabile è uno spazio di Lindelöf

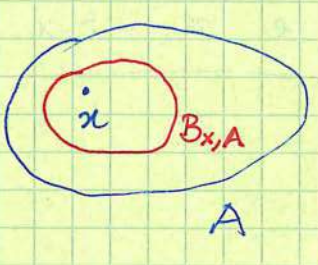
↑ dunque, ad esempio, ogni spazio metrico separabile è di Lindelöf

Dimostrazione Siccome X è 2-numerabile, esiste una base di aperti $\mathcal{B}$ numerabile di X.

Sia ora $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di X.

Sia $A \in \mathcal{A}$ e $x \in A$. Allora esiste $B_{x,A}$ e $\mathcal{B}$ tale che

$$x \in B_{x,A} \subseteq A$$



Sia

$$\mathcal{B}' = \{ B_{x,A} \mid A \in \mathcal{A},\ x \in A \}$$

Siccome $\mathcal{B}'$ è una sottofamiglia di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ è numerabile, segue che anche $\mathcal{B}'$ è numerabile. Allora posso elencare tutti gli elementi di $\mathcal{B}'$ come segue:

$$\mathcal{B}' = \{ B_{x_1,A_1}, B_{x_2,A_2}, B_{x_3,A_3}, \ldots, B_{x_n,A_n}, \ldots \}$$

Ogni $x \in X$ è per costruzione contenuto in almeno un $B_{x,A}$, dunque

$$\{ A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \ldots \}$$

è un sottoricoprimento numerabile di X estratto da $\mathcal{A}$. ∎

Il viceversa della Proposizione non vale: si può ad esempio dimostrare che la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_{sf}$ è uno spazio di Lindelöf, tuttavia sappiamo che $\mathbb{R}_{sf}$ non è 2-numerabile.

Per uno spazio metrico, tuttavia, le due proprietà sono equivalenti. Infatti si può dimostrare la seguente

Proposizione Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora sono equivalenti:

(1) X è 2-numerabile
(2) X è separabile
(3) X è Lindelöf.

Dim Abbiamo già visto che per spazi metrici (1) e (2) sono condizioni equivalenti. Inoltre la Proposizione precedente mostra che vale sempre l'implicazione (1) $\Rightarrow$ (3). Rimane dunque solo da mostrare che, per uno spazio metrico, (3) $\Rightarrow$ (1). Sia dunque X spazio metrico di Lindelöf e consideriamo i seguenti ricoprimenti aperti di X:

$$\mathcal{A}_1 := \{ B(x, 1) \mid x \in X \}$$
$$\mathcal{A}_2 := \{ B(x, 1/2) \mid x \in X \}$$
$$\mathcal{A}_3 := \{ B(x, 1/3) \mid x \in X \}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}_n := \{ B(x, 1/n) \mid x \in X \}$$
$$\vdots$$

Siccome X è di Lindelöf, da ciascuno di essi possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile, che indico con

$$\mathcal{A}_1^*, \mathcal{A}_2^*, \dots, \mathcal{A}_n^*, \dots$$

Allora

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}_1^* \cup \mathcal{A}_2^* \cup \mathcal{A}_3^* \cup \dots \cup \mathcal{A}_n^* \cup \dots$$

è una famiglia numerabile di aperti di X (dato che è unione numerabile di insiemi numerabili).

Se dimostro che $\mathcal{B}$ è una base di aperti per X, ho dimostrato che X è 2-numerabile e la dimostrazione sarà conclusa.

Sia dunque V un qualsiasi aperto di X non vuoto,

e sia $x \in V$. Allora esiste $m > 0$ tale che

$$B\left(x, \frac{1}{m}\right) \subseteq V$$

Siccome $\mathcal{Q}^*_{2m}$ è un ricoprimento aperto di X, esiste $y \in X$ tale che

$$x \in B\left(y, \frac{1}{2m}\right) \in \mathcal{Q}^*_{2m}$$

Se $z \in B\left(y, \frac{1}{2m}\right)$, si ha allora

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

cioè $z \in B\left(x, \frac{1}{m}\right)$. Allora

$$x \in B\left(y, \frac{1}{2m}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{m}\right) \subseteq V,$$

cioè $B\left(y, \frac{1}{2m}\right)$ è un elemento di $\mathcal{B}$ contenente x e tutto contenuto in V.

Ho dunque dimostrato che la famiglia numerabile $\mathcal{B}$ è una base di aperti per X, dunque X è 2-numerabile e ciò conclude la dimostrazione. ∎

Oss Dunque, anche per spazi metrici, Lindelöf non implica compatto. Ad esempio, $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea è Lindelöf (in quanto è separabile) ma non è compatto. ↯

Dimostrazione del fatto che uno spazio X non numerabile con la top. cofinita non è 1-numerabile.

Sia $x \in X$ e sia $\{U_n\}$ una famiglia numerabile di intorni di x, che posso supporre aperti. Allora $U_n = X - T_n$, con $T_n \subset X$ finito, $x \notin T_n$.

Posto $T = \bigcup_{n \geq 1} T_n \cup \{x\}$, T è numerabile. Dunque $\exists\, y \in X$, $y \notin T$ (X è non num.)

Sia $U = X - \{y\}$. Allora U è un intorno di x che (per costruzione) non contiene nessuno degli U_n. Dunque X non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni di x.

Compattezza per successioni.

o "sequenzialmente compatto"

Def Uno spazio topologico X si dice compatto per successioni se ogni successione in X possiede un'estratta convergente.

Proposizione
Sia X uno spazio topologico 2-numerabile.
Allora le seguenti due condizioni sono equivalenti:
(1) X è compatto
(2) X è compatto per successioni

(1) $\Rightarrow$ (2) Supponiamo che X sia compatto e sia $\{x_n\}$ una successione a valori in X. Se $\{x_n\}$ è un insieme finito, ovviamente $\{x_n\}$ ha un'estratta convergente [dato che uno dei valori si ripeterà necessariamente infinite volte dandoci un'estratta costante].
Possiamo dunque supporre che l'insieme dei valori distinti di $\{x_n\}$ sia un insieme infinito, che chiamo S. Mostriamo ora che esiste un punto $x \in X$ ogni intorno del quale contiene infiniti elementi di S. Infatti, supponiamo per assurdo che ciò non accada. Allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che $U_i \cap S$ è un insieme finito per ogni $i \in I$. Siccome S è infinito, $\{U_i\}_{i \in I}$ non può ammettere nessun sottoricoprimento finito, e ciò contraddice la compattezza di X.
Esiste dunque $x \in X$ con la proprietà voluta. Poiché X è 2-numerabile, esso è in particolare 1-numerabile, dunque esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni

intorni di x

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots \supseteq V_n \supseteq \dots$$

Per quanto visto, in ogni V_i cadono infiniti elementi di S.
Allora posso scegliere

$$x_{n_1} \in S \cap V_1$$

$$x_{n_2} \in S \cap V_2, \quad n_2 > n_1 \text{ e } x_{n_2} \neq x_{n_1}$$

$$x_{n_3} \in S \cap V_3, \quad n_3 > n_2 \text{ e } x_{n_3} \neq x_{n_1}, \; x_{n_3} \neq x_{n_2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n_k} \in S \cap V_k, \quad n_k > n_{k-1} \text{ e } x_{n_k} \neq x_{n_j} \text{ per ogni } j < k$$

$$\vdots$$

In tal modo ho estratto da $\{x_n\}$ una successione x_{ik} tale che

$$x_{n_k} \longrightarrow x,$$

in altre parole $\{x_n\}$ ammette un'estratta convergente.
Dunque X è compatto per successioni.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supponiamo che X sia compatto per successioni e mostriamo che è compatto. Equivalentemente, possiamo vedere che se X non è compatto allora non è compatto per successioni, ovvero che esiste in esso una successione che non ammette estratte convergenti.

Infatti, sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X che non ammetta sottoricoprimenti finiti. Siccome ogni spazio topologico 2-numerabile è Lindelöf, è tuttavia possibile estrarre da $\mathcal{A}$ un sottoricoprimento $\mathcal{A}'$ numerabile, ossia

$$\mathcal{A}' = \{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

A maggior ragione $\mathcal{U}$ non ammette sottoricoprimento finito, dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$x_n \in X - \bigcup_{j=1}^{n} A_j \qquad (\text{quindi } x_n \notin A_j \text{ per } n \geq j)$$

Consideriamo ora la successione $\{x_n\}$ e mostriamo che essa non ammette estratte convergenti. Per assurdo, sia $\{x_{n_k}\}$ un'estratta convergente di $\{x_n\}$, diciamo

$$x_{n_k} \xrightarrow[k]{} p.$$

Siccome $p \in X$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $p \in A_N$. ~~[illegible]~~ D'altra parte per costruzione

$$x_{n_k} \notin A_N \quad \text{per } n_k \geq N$$

Ma A_N è un intorno di p, dunque x_{n_k} non può convergere a p, contraddizione.

Questo mostra che X non è compatto per successioni, e la dimostrazione è conclusa ▮

Oss La dimostrazione data mostra che l'implicazione

X compatto $\Rightarrow$ X compatto per successioni

vale in ogni spazio 1-numerabile.

Proposizione Sia (X,d) uno spazio metrico compatto per successioni. Allora X è separabile.

Dim Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ consideriamo la famiglia $\mathcal{F}_n$ dei sottoinsiemi di X definita da

Acocella - Tom. Vesentini Lemma 4.3 pagine 187-188

$$\mathcal{F}_n := \left\{ A \text{ sottoinsieme di } X \mid \forall x,y \in A \text{ con } x \neq y \text{ si ha } d(x,y) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Osserviamo che se $A \in \mathcal{F}_n$ per qualche n, allora A è un insieme finito. Infatti se fosse un insieme infinito, conterrebbe una successione di elementi tutti distinti tale che la distanza fra due qualsiasi di essi è almeno $1/n$ - Tale successione chiaramente non può ammettere sottosuccessioni convergenti, e questo contraddirebbe l'ipotesi che X è compatto per successioni.

Sicuramente esiste n tale che $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$. Inoltre $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni n.

Affermo che esiste $A_n \in \mathcal{F}_n$ con la seguente proprietà:

$$(*) \quad A_n \cup \{x\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow x \in A_n$$

(in altre parole, A_n è un elemento massimale di $\mathcal{F}_n$ rispetto all'inclusione)

Infatti, sia A un qualsiasi elemento di $\mathcal{F}_n$.

Se A non ha la proprietà $(*)$, allora esiste $x_1 \notin A$ tale che

$$A_1 := A \cup \{x_1\} \in \mathcal{F}_n$$

Se neppure A_1 ha la proprietà $(*)$, allora esiste $x_2 \notin A_1$ tale che

$$A_2 := A_1 \cup \{x_1\} = A \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \in \mathcal{F}_n$$

Questo procedimento può essere ripetuto solo un numero finito

di solito, dopodiché si perviene ad un sottoinsieme $A_n \in \mathcal{F}_n$ con la proprietà (*). Tuttavia, in caso contrario, otterrei un elemento di $\mathcal{F}_n$ di cardinalità infinita, assurdo in quanto abbiamo visto che ogni sottoinsieme contenuto in $\mathcal{F}_n$ deve essere finito.

A questo punto, per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sia $A_n \in \mathcal{F}_n$ un sottoinsieme che ha la proprietà (*) -
Siccome ogni A_n è finito (dunque numerabile) il sottoinsieme

$$B := \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

di X è numerabile. Se dimostro che B è denso in X la dimostrazione è dunque conclusa (X è separabile) -
Per assurdo supponiamo B non denso in X, ossia $\overline{B} \subsetneq X$. Allora esiste $x \in X$ con $x \notin \overline{B}$ -
Ma dire che $x \notin \overline{B}$ vuol dire che esiste una palla di raggio positivo centrata in x che non interseca B, cioè esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$B\left(x, \frac{1}{m}\right) \cap B = \phi,$$

in altre parole

$$d(x,y) \geq \frac{1}{m} \text{ per ogni } y \in B, \text{ dunque in particolare per ogni } y \in A_m$$

Ma allora

$$A_m \cup \{x\} \in \mathcal{F}_m \quad \text{e pertanto}$$

la proprietà (*) implica

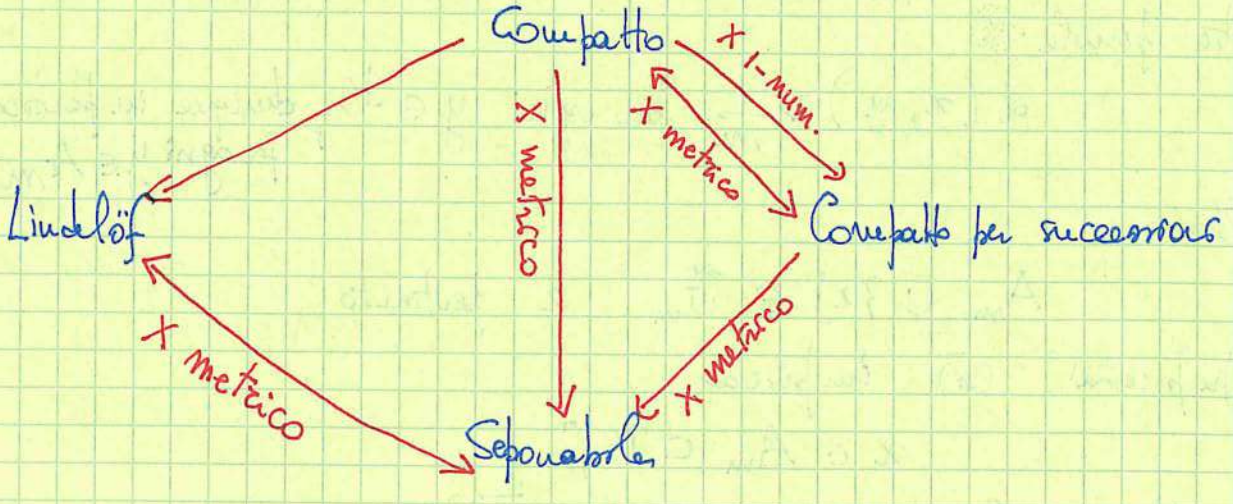
$$x \in A_m \subset B,$$

contraddizione (dato che per ipotesi $x \notin \overline{B}$) ∎

Come corollario, otteniamo il seguente importante

Teorema Sia (X,d) uno spazio metrico.
Allora sono equivalenti:
(1) X è compatto
(2) X è compatto per successioni.
Inoltre, se X soddisfa (1) (o, equivalentemente, (2)) allora X è necessariamente separabile.

Dim Abbiamo visto che
(1) $\Rightarrow$ (2) vale in ogni spazio 1-numerabile, dunque in particolare in qualsiasi spazio metrico.
Allora resta solo da mostrare che (2) $\Rightarrow$ (1).
Sia dunque (X,d) uno spazio metrico compatto per successioni. Per la proposizione precedente, X è separabile dunque è 2-numerabile. Ma abbiamo visto che in ogni spazio metrico 2-numerabile compattezza e compattezza per successioni sono concetti equivalenti, dunque X è compatto e la dimostrazione è conclusa. ∎



Esempio Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ lo spazio di tutte le successioni limitate $\{a_n\}_n$ a valori in $\mathbb{R}$, con la distanza

$$d(\{a_n\},\{b_n\}) = \sup_n |a_n - b_n| .$$

Tale spazio non è separabile (esercizio). Di conseguenza, non è compatto (equivalentemente, non è compatto per successioni).

Dimostriamo direttamente che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ non è compatto per successioni, esibendo direttamente una successione di elementi di $\ell^\infty(\mathbb{R})$ che non ammette nessuna estratta convergente.

Attenzione Una successione di elementi di $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è una successione di successioni, dunque è esprimibile con una matrice infinita:

$$\{a_{1n}\}_n = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots)$$
$$\{a_{2n}\}_n = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\{a_{mn}\}_n = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots)$$

In alternativa, possiamo pensare ad essa come ad una successione di funzioni

$$f_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ed è questa la descrizione che userò nel seguito

$$f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$$

Ora considero la successione $\{f_m\}_m$ in $\ell^\infty(\mathbb{R})$ tale che ogni f_m è la successione che vale costantemente m

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f_1(n) = 1 \ \forall n$ $\quad (1, 1, 1, \dots)$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f_2(n) = 2 \ \forall n$ $\quad (2, 2, 2, \dots)$

$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f_3(n) = 3 \ \forall n$ $\quad (3, 3, 3, \dots)$

$\vdots$

$f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f_m(n) = m \ \forall n$ $\quad (m, m, \dots)$

Affermo che la successione $\{f_m\}$ non contiene nessuna estratta convergente. Infatti, supponiamo per assurdo che tale estratta

$\{f_{m_k}\}$ esista, cioè

$$f_{m_k} \xrightarrow{k} g \qquad \text{con } g \in \ell^\infty(\mathbb{R})$$

Allora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad g(1) = a_1, \ g_2 = a_2, \dots, g_t = a_t$

dove $|a_j| \leq M$ con $M \in \mathbb{R}$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Per definizione di convergenza in $\ell^2(\mathbb{R})$, devo avere

$$\lim_k d\left(f_{m_k}, g\right)_\infty = 0, \text{ ossia}$$

$$\lim_k \sup_n |f_{m_k}(n) - g(n)| = 0.$$

D'altra parte (disuguaglianza triangolare)

$$|f_{m_k}(n) - g(n)| = |m_k - a_n| \geq |m_k| - |a_n|$$

$$\geq m_k - M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ossia

$$\sup_n |f_{m_k}(n) - g(n)| \geq m_k - M \quad \text{e quindi}$$

$$\lim_k \sup_n |f_{m_k}(n) - g(n)| \geq \lim_k (m_k - M) = +\infty,$$

contraddizione.

Oss Questo esempio è anche un esempio di uno spazio 1-numerabile ma non Lindelöf. Infatti uno spazio metrico è 1-numerabile ma è Lindelöf $\iff$ è separabile $\iff$ è σ-compatto.

Oss Per spazi topologici qualsiasi, le due proprietà "compattezza" e "compattezza per successioni" sono fra loro indipendenti. In altre parole, è possibile costruire esempi di spazi compatti che non sono compatti per successioni e viceversa.

Esempi espliciti possono essere trovati in [Manetti, Esercizi p. 133 7.13 e 7.14]
La costruzione di tali esempi richiede i prodotti di Tychonoff e il Teorema di Tychonoff, di cui non abbiamo fatto discussi qui.

La compattificazione ad un punto di uno spazio topologico (o compattificazione di Alexandroff)

Sia (X, τ) uno spazio topologico.
Definiamo ora un nuovo spazio topologico $(\hat{X}, \hat{\tau})$ nel modo seguente:

$\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ dove "∞" è un elemento non contenuto in X

$\hat{\tau} = \tau \cup \{B \cup \{\infty\} \mid B \subseteq X \text{ e } X - B \text{ è compatto e chiuso in } X\}$
$= \tau \cup \{(X - K) \cup \{\infty\} \mid K \text{ compatto e chiuso in } X\}$.

(1) $\hat{\tau}$ è una topologia su $\hat{X}$.

Sia $\mathcal{B}_\infty$ la sottofamiglia degli elementi di $\hat{\tau}$ che contengono il punto ∞. Allora possiamo scrivere

$$\hat{\tau} = \mathcal{B}_\infty \dot{\cup} \tau, \qquad \mathcal{B}_\infty \cap \tau = \emptyset$$

Sia $\{B_i\}_{i \in I}$ una qualsiasi sottofamiglia di $\mathcal{B}_\infty$.
Allora

$$\hat{X} - \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\hat{X} - B_i\right) = \bigcap_{i \in I} \left(X - (B_i - \{\infty\})\right)$$

Siccome per definizione di $\hat{\tau}$ ogni $X - (B_i - \infty)$ è chiuso e compatto in X, anche la loro intersezione lo è.
Da ciò segue

$$\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}_\infty$$

Analogamente, possiamo scrivere

$$\hat{X} - \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\hat{X} - B_i\right) = \bigcup_{i \in I} \left(X - (B_i - \{\infty\})\right)$$

Siccome l'unione finita di chiusi è chiusa e l'unione finita di compatti è compatta, segue che per ogni famiglia finita I si ha

$$\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}_\infty .$$

Da quanto appena dimostrato, segue che l'unione di una famiglia qualsiasi di elementi di $\hat{\tau}$ è ancora un elemento di $\hat{\tau}$ se tutti gli elementi stanno in τ o se tutti gli elementi stanno in $\mathcal{B}_\infty$. Se ciò non accade, questa unione è della forma $A \cup B$, con $A \in \tau$ e $B \in \mathcal{B}_\infty$. entrambi non vuoti.

Del resto:

$$\hat{X} - (A \cup B) = (\hat{X} - A) \cap (\hat{X} - B)$$

$$= (X - A) \cap (X - (B - \{\infty\}))$$

Ora notiamo che $X - A$ è chiuso in X, e che per definizione $X - (B - \{\infty\})$ è chiuso e compatto in X. Ma allora l'intersezione di queste due sottoinsiemi è chiusa e compatta in X.

Dunque $\hat{X} - (A \cup B)$ è chiuso e compatto in X, ossia

$$A \cup B \in \mathcal{B}_\infty \subset \hat{\tau}.$$

Questo mostra che l'unione arbitraria di elementi di $\hat{\tau}$ è ancora un elemento di $\hat{\tau}$.

Analogamente, ogni intersezione finita di elementi di $\hat{\tau}$ sta ancora in $\hat{\tau}$, se tutti gli elementi stanno in τ o tutti stanno in $\mathcal{B}_\infty$. Altrimenti, questa intersezione è della forma $A \cap B$, dove $A \in \tau$ e $B \in \mathcal{B}_\infty$.

Allora

$A \cap B = A \cap (B - \{\infty\})$

è intersezione di due aperti di τ, dunque $A \cap B \in \tau$.

Allora è evidente che $\hat{\tau}$ è una topologia su $\hat{X}$.

(2) $\hat{X}$ è compatto e X è un sottospazio aperto di $\hat{X}$

Infatti gli aperti della topologia τ di X sono aperti di $\hat{\tau}$ e ogni aperto di $\hat{\tau}$ interseca X in un aperto di τ : infatti se $A \in \hat{\tau}$ si ha

$$A \cap X = A - \{\infty\} \quad \text{che è aperto in } X$$
per definizione di $\hat{\tau}$

Dunque $(\hat{X}, \hat{\tau})$ induce su X la topologia τ, in altre parole (X, τ) è sottospazio di $(\hat{X}, \hat{\tau})$.

Osserviamo poi che $X \in \tau$, dunque $X \in \hat{\tau}$, in altre parole $\bar{X}$ è aperto in $\hat{X}$ (e pertanto $\{\infty\}$ è chiuso)

Dimostriamo ora che $\hat{X}$ è uno spazio topologico compatto.

Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$ e sia $i_0 \in I$ tale che A_{i_0} contenga ∞. Allora per definizione

$$A_{i_0} = B \cup \{\infty\}, \quad \text{con } X - B \text{ compatto e chiuso in } X.$$

Allora siccome $\hat{X} - A_{i_0} = X - B$, segue che si può estrarre dal ricoprimento aperto $\{A_i\}_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}}$ di $\hat{X} - A_{i_0}$ un sottoricoprimento finito, ossia esistono $i_1, \dots, i_n \in I - i_0$ tali che

$$\hat{X} - A_{i_0} = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}.$$

Pertanto

$$\hat{X} = A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_m}, \quad \text{cioè}$$

abbiamo estratto da $\mathcal{A}$ un sottoricoprimento finito di $\hat{X}$.
Questo mostra che $\hat{X}$ è compatto.

③ X è compatto $\iff$ ∞ è punto isolato di $\hat{X}$

Se X non è compatto, allora

$$\overline{X} = \hat{X},$$

ossia X è denso in $\hat{X}$.

Se X è uno spazio compatto, allora dal fatto che

$$\hat{X} - \{\infty\} = X \quad (\text{ossia } \hat{X} = X \cup \{\infty\} \in \hat{\tau})$$

e dalla definizione di $\hat{\tau}$, ~~ossia X è aperto in $\hat{\tau}$~~
segue che $\{\infty\}$ è aperto in $\hat{X}$, ossia che ∞ è punto isolato in $\hat{X}$. Viceversa, se ∞ è punto isolato allora $\{\infty\}$ è aperto in $\hat{X}$, dunque per definizione di $\hat{\tau}$ si ha che X è compatto.

Caso X compatto

Se X è non compatto, si ha dunque che ∞ non è punto isolato per X. Allora ∞ è necessariamente punto d'accumulazione per X, ossia ogni intorno di ∞ in $\hat{X}$ contiene punti di X, ovvero $\infty \in \partial X$
Allora la chiusura di X in $\hat{X}$ è data da

$$\overline{X} = X \cup \partial X = X \cup \{\infty\} = \hat{X},$$

il che mostra la densità di X in $\hat{X}$.

Lo spazio topologico $(\hat{X}, \hat{\tau})$ così ottenuto si chiama compattificazione ad un punto (o compattificazione di Alexandroff) di X.

Esempio 1 Sia X uno spazio metrico.
Allora X è compatto se e solo se è compatto per successioni. Se X è non compatto, esistono dunque in X successioni che non ammettono nessuna estratta convergente. Allora $\hat{X}$ è lo spazio topologico ottenuto aggiungendo tutte le successioni che in X non ammettono sottosuccessioni convergenti hanno limite uguale a ∞ quando viste come successioni a valori in $\hat{X}$.

Esempio 2 Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Allora
$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è omeomorfo a S^1

La proiezione stereografica inversa dal polo nord $N = (0,1)$

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 - \{N\}$$
$$x \longrightarrow \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

fornisce un omeomorfismo fra $\mathbb{R}$ e $S^1 - \{N\}$. Definiamo ora

$$g : \hat{\mathbb{R}} \longrightarrow S^1 \quad \text{come segue}$$
$$g(x) = \varphi(x) \qquad x \neq \infty$$
$$g(\infty) = N$$

Tale applicazione è biettiva e continua. Siccome $\hat{\mathbb{R}}$ è compatto e S^1 è di Hausdorff, segue che g è un omeomorfismo. In altre parole, la compattificazione

ad un punto di $\mathbb{R}$ è il cerchio S^1 (a meno di omeomorfismi).
Osserviamo che le successioni senza estratte convergenti in $\mathbb{R}$ (ad esempio, la successione dei naturali) convergono tutte a ∞ in $\hat{\mathbb{R}}$. Gli intorni di ∞ in $\hat{\mathbb{R}}$ vengono mappati omeomorficamente in intorni di $N=(0,1)$ in S^1.

Esempio 3 $X = \mathbb{Q}$ con la metrica euclidea.
Allora $\hat{\mathbb{Q}}$ è uno spazio topologico T_1 ma non T_2
(questo mostra che in generale la compattificazione ad un punto non preserva gli assiomi di separazione).
Per mostrare che $\hat{\mathbb{Q}}$ non è T_2, mostro che non posso separare ∞ dagli altri punti per mezzo di aperti.
Ricordiamo che una base per la topologia di $\mathbb{Q}$ è della forma

$$U_{a,b} = \{(a,b) \cap \mathbb{Q} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

Sia poi U un intorno aperto di ∞ in $\hat{X}$; allora $U - \{\infty\} = \mathbb{Q} - V$, dove V è chiuso e compatto in $\mathbb{Q}$.
Se $U \cap U_{a,b} = \emptyset$ per qualche $a,b \in \mathbb{R}$, si ha

$$U \subset \mathbb{Q} - U_{a,b}, \text{ ossia passando ai complementari}$$

$$U_{a,b} \subset \hat{\mathbb{Q}} - U = \mathbb{Q} \cup \{\infty\} - U$$
$$= \mathbb{Q} - (U - \{\infty\}) = V$$

Siccome V è compatto in $\mathbb{Q}$, non può contenere $U_{a,b} = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ (infatti $U_{a,b}$ non è compatto per successioni, dunque neanche V lo sarebbe prendendo una successione in $U_{a,b}$ che converge in $\mathbb{R}$ ad un numero razionale).

Ciò mostra che $\hat{\mathbb{Q}}$ non è T_2 (il punto è che tutte le successioni che non convergono in $\mathbb{Q}$, ad esempio le approssimazioni degli irrazionali, convergono ad ∞ in $\hat{\mathbb{Q}}$).

Però $\hat{\mathbb{Q}}$ è T_1.

Siccome $\mathbb{Q}$ è T_1

e $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

basta mostrare che per ogni $q \in \mathbb{Q}$ posso trovare un aperto che contiene q ma non ∞ e uno che contiene ∞ ma non q.

Sia $U_{a,b} \in \mathbb{Q}$ tale che $q \in U_{a,b}$ - Allora

$$q \in U_{a,b}, \quad \infty \notin U_{a,b}.$$

Sia poi $V = \{q\}$, $U = (\mathbb{Q} - V) \cup \{\infty\}$

Ovviamente per definizione $U \in \hat{T}$ (dato che

$\bar{V} = \mathbb{Q} - (\mathbb{Q} - V) = V$ è compatto e chiuso in $\mathbb{Q}$)

e si ha

$$\infty \in U, \quad q \notin U$$

per cui effettivamente $\hat{\mathbb{Q}}$ è T_1.

La seguente proposizione caratterizza i casi in cui $\hat{X}$ è di Hausdorff.

Proposizione Sia X uno spazio topologico ~~semplicemente~~.

Allora

$\hat{X}$ è di Hausdorff $\iff$ X è di Hausdorff e ogni punto $x \in X$ possiede un intorno compatto.

Dim

$\Leftarrow$ Supponiamo che X sia di Hausdorff e che ogni punto $x \in X$ possieda un intorno compatto.

Per mostrare che $\hat{X}$ è di Hausdorff basta mostrare che, dato $x \in X$ e il punto ∞, esistono un intorno U di x e uno V di ∞ in $\hat{X}$ tale che $U \cap V = \phi$.

Per ipotesi, ~~Siccome X è compatto~~, basta scegliere U compatto. Essendo X di Hausdorff, U è chiuso in X. Posto

$$B = X - U,$$

per definizione $V = B \cup \{\infty\}$ è un aperto in $\hat{X}$, dunque un intorno di ∞. Ovviamente

$$U \cap V = \phi,$$

dunque $\hat{X}$ è di Hausdorff.

$\Rightarrow$ Viceversa, supponiamo che $\hat{X}$ sia di Hausdorff. Siccome X è un sottospazio di $\hat{X}$, segue che X è di Hausdorff.

Resta da mostrare che ogni punto $x \in X$ possiede un intorno compatto. Siccome $\hat{X}$ è di Hausdorff, esistono

U intorno di x

V intorno di ∞

tali che $U \cap V = \phi$.

Per definizione $B := X - V$ è chiuso e compatto in X. Ovviamente

$$U \cap V = \phi \Rightarrow U \subseteq B,$$

pertanto B è un intorno compatto di x ∎

Esempio 1 $\mathbb{R}$ è di Hausdorff e ogni punto x ha un intorno compatto $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Infatti $\hat{\mathbb{R}} \cong S^1$ che è di Hausdorff.

Esempio 2 $\mathbb{Q}$ è di Hausdorff ma nessun punto di $\mathbb{Q}$ ha un intorno compatto (nessun intervallo di $\mathbb{Q}$ è compatto per successioni).

Esempio 3 $\mathbb{R}^2$ è di Hausdorff e ogni punto ha un intorno compatto. Infatti $\hat{\mathbb{R}}^2 \cong S^2$ (usare la proiezione stereografica). Allo stesso modo, dimostrare che $\hat{\mathbb{R}}^n \cong S^n$.

Esempio 4 Sia $X = \mathbb{Z}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$. Allora $\mathbb{Z}$ è uno spazio topologico discreto, dunque non è compatto. Ovviamente è di Hausdorff e ogni punto ha un intorno compatto (il punto stesso).
$\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ e un intorno di ∞ nella topologia di $\hat{\mathbb{Z}}$ è fatto come segue

$$U = B \cup \{\infty\}$$

con $\mathbb{Z} - B$ chiuso e compatto in $\mathbb{Z}$.

Siccome un sottinsieme di uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito, segue che ogni intorno di ∞ in $\hat{\mathbb{Z}}$ è della forma

$$U_{a,b} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a,\ x \geq b \} \qquad a, b \in \mathbb{Z},\ a < b$$

Topologia quoziente / Mappe di identificazione topologica

Sia X un insieme. Ricordiamo che una relazione d'equivalenza $\cong$ su X è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Per ogni $x \in X$, definiamo la classe d'equivalenza di x come il sottoinsieme

$$[x] := \{ y \in X \mid x \cong y \} \subseteq X$$

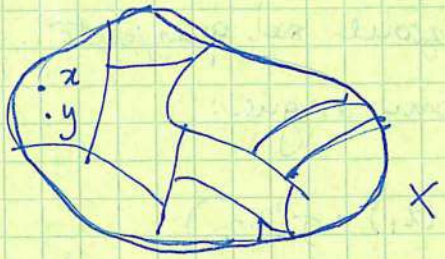
Osserviamo che due classi d'equivalenza sono disgiunte oppure coincidono. Infatti se abbiamo $y \in [x_1] \cap [x_2]$ allora $y \cong x_1$ e $y \cong x_2$, cioè $x_1 \cong x_2$, quindi $[x_1] = [x_2]$.

Pertanto una relazione d'equivalenza definisce una partizione $\mathcal{P}$ di X, ossia una suddivisione

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j)$$

Viceversa, ogni partizione $\mathcal{P}$ di X definisce una relazione d'equivalenza $\cong$ su X, semplicemente definendo

$$\left[x \cong y \iff \text{Esiste } A_i \text{ insieme della partizione con } x, y \in A_i \right]$$



Dunque

$$\left[\begin{array}{c} \text{Relazioni d'equivalenza} \\ \cong \text{ su } X \end{array} \xleftrightarrow{1:1} \text{Partizioni } \mathcal{P} \text{ di } X \right]$$

Sia ora X un insieme dotato di una relazione d'equivalenza $\cong$. Allora chiamo <u>spazio quoziente</u> l'insieme delle classi di equivalenza

$$X/\cong \;:=\; \{\,[x] \mid x \in X\,\}.$$

$\pi : X \to X/\cong$, $\pi(x) = [x]$ è detta proiezione sul quoziente

Ovviamente, la cardinalità di $X/\cong$ è esattamente uguale alla cardinalità della partizione $\mathcal{P}$ di X indotta da $\cong$, dato che gli insiemi di $\mathcal{P}$ sono in corrispondenza biunivoca con le classi d'equivalenza di $\cong$.

<u>Esempio</u> Sia $X = \mathbb{Z}$ con la relazione "congruenza modulo n"

$$x \cong y \iff x - y \text{ è multiplo di } n.$$

Allora ho esattamente n classi, ~~infatti~~ infatti

$$X/\cong \;=\; \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$$

i possibili resti della divisione per n

Sia ora $f : X \to Y$ un'applicazione <u>suriettiva</u>.
Voglio mostrare che esiste una e una sola relazione d'equivalenza $\cong$ su X tale che $Y = X/\cong$ e f coincide con la proiezione sul quoziente.
La relazione è data come segue:

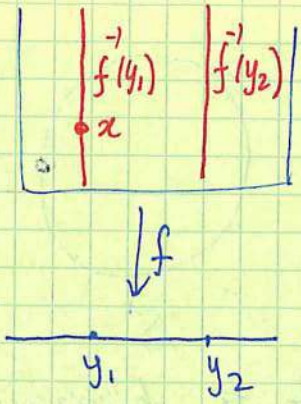
$$x_1 \cong x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

Ovviamente si tratta di una relazione d'equivalenza, e la corrispondente partizione è data da

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$$

($f^{-1}(y)$ è detta la <u>fibra</u> di f su y)

Le classi d'equivalenza sono esattamente le fibre di f, quindi



X (Se $x \in f^{-1}(y)$, allora $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$)

fisso vedere Y come l'insieme quoziente $X/\cong$, dato che ~~[illegible]~~ essendo la mappa suriettiva l'insieme delle fibre è in corrispondenza biunivoca con Y.
Se vedo Y come $X/\cong$, chiaramente f coincide con la proiezione al quoziente $\pi : X \to X/\cong$ e si ha $[x] = f^{-1}(f(x))$

Dunque abbiamo

Relazioni d'equivalenza $\cong$ su X	$\xleftrightarrow{1:1}$	Partizioni $\mathcal{P}$ di X	$\xleftrightarrow{1:1}$	Applicazioni suriettive $f: X \to Y$

Esempio Sia data l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad f(x) = e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x)$$

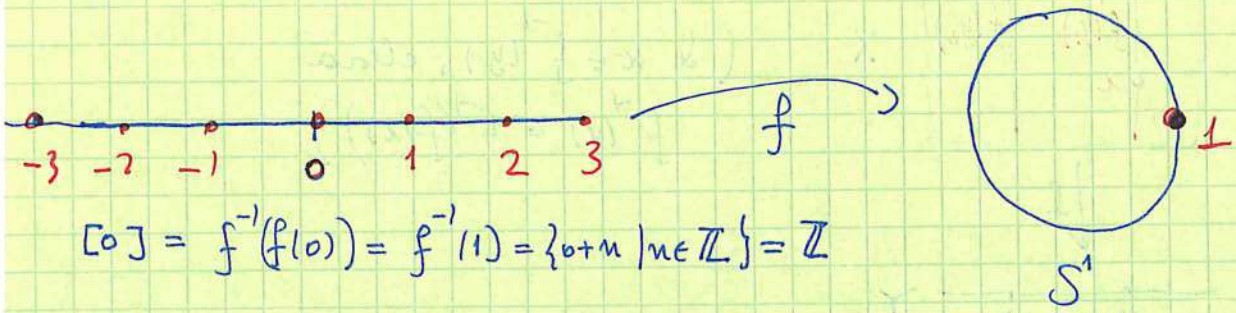
Allora $f(x) = f(y) \iff \begin{cases} \cos 2\pi x = \operatorname{sen} 2\pi y \\ \operatorname{sen} 2\pi x = \operatorname{sen} 2\pi y \end{cases}$, cioè

x e solo se $x - y \in \mathbb{Z}$

Dunque la relazione d'equivalenza indotta da f su $\mathbb{R}$ è semplicemente

$x \cong y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, e le corrispondenti classi sono

$$[x] = \{ x + n \mid n \in \mathbb{Z} \} = f^{-1}(f(x)) \quad \forall x \in S^1$$



$[0] = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(1) = \{0+n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

A questo punto possiamo dare l'importante definizione seguente.

Definizione (Topologia quoziente)

Sia (X, τ_X) uno spazio topologico e $f: X \to Y$ una funzione suriettiva. Definiamo topologia quoziente su Y rispetto a f la topologia τ_Y definita come segue:

$$\tau_Y := \{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X \}$$

In altre parole, i sottoinsiemi aperti di Y sono definiti come i sottoinsiemi la cui controimmagine è aperta in X

Proposizione

La topologia quoziente τ_Y è la topologia più fine che rende l'applicazione $f: X \to Y$ continua.

Dim Innanzitutto facciamo vedere che τ_Y è una topologia. Poiché $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$ segue che $\emptyset, Y \in \tau_Y$.
Resta da mostrare che τ_Y è chiusa per unioni qualsiasi ed intersezioni finite. Siano $\{A_i \mid i \in I\}$ elementi di τ_Y. Allora $f^{-1}(A_i)$ è aperto per ogni i, dunque

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \text{ è aperto in } X,$$

dunque $\bigcup_{i \in I} A_i$ è in τ_Y

Analogamente, se $A_1, \dots, A_n$ sono in τ_Y si ha

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)$$ che è aperto in X,

dunque $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_Y$.

Infine, mostriamo che τ_Y è la topologia più fine che rende continua $f: X \to Y$. Infatti, sia τ'_Y una topologia su Y per cui f è continua. Allora $\forall U \in \tau'_Y$ si ha

$f^{-1}(U) \in \tau_X$, dunque per definizione $U \in \tau_Y$.

Pertanto $\tau'_Y \subseteq \tau_Y$, da cui l'asserto. ∎

Oss 1 Si ha $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$, dunque posso definire la topologia quoziente in funzione dei chiusi come segue:

C è chiuso in $Y \iff f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

Oss 2 Se $\cong$ è una relazione d'equivalenza su X spazio topologico e $\pi: X \to X/\cong$ è l'~~applicazione~~ la proiezione sul quoziente, la discussione precedente mostra che la topologia quoziente su $X/\cong$ è la topologia più fine che rende π una funzione continua

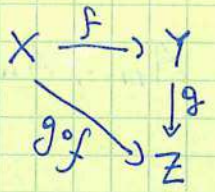
Proposizione (Proprietà universale della topologia quoziente)

Sia (X, τ_X) uno spazio topologico, $f: X \to Y$ un'applicazione suriettiva e dotiamo Y della topologia quoziente.

Sia poi $g: Y \to Z$ una qualsiasi applicazione fra spazi topologici.

Allora

g è continua $\iff$ $g \circ f: X \to Z$ è continua.



g continua $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ lo è

Dimostrazione Se g è continua, allora $g \circ f$ lo è in quanto composizione di applicazioni continue.

Viceversa, sia $g \circ f$ funzione continua e sia U aperto di Z. Allora $(g \circ f)^{-1}(U)$ è aperto di X. Ma

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

Siccome su Y ho la topologia quoziente, segue che $g^{-1}(U)$ è aperto di Y, cioè g è continua ∎

Corollario

Sia X spazio topologico, $\cong$ relazione d'equivalenza su X. Sia $X/\cong$ dotato della topologia quoziente. Allora un'applicazione

$$g : X/\cong \longrightarrow Z$$

è continua se e solo se $g \circ \pi : X \to Z$ è continua

Definizione

Una mappa di identificazione è un'applicazione surgettiva

$$f : X \longrightarrow Y$$

dove Y ha la topologia quoziente rispetto ad f.

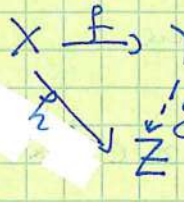
Per quanto visto, una tale mappa è continua.

Esempio Se dotiamo $X/\cong$ della topologia quoziente, la mappa di proiezione

$$\pi : X \longrightarrow X/\cong$$

è una mappa di identificazione.

Proposizione Sia $f: X \to Y$ una mappa di identificazione e sia $h: X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste un'applicazione continua $g: Y \to Z$ tale che $h = g \circ f$ se e solo se h è costante sulle fibre di f.



$g \circ f = h$

Dim Osserviamo che affinché g esista deve avere $(g \circ f)(x) = h(x)$ per ogni $x \in X$. In particolare, se $x_1, x_2 \in X$ stanno nella stessa fibra di f cioè, per definizione, $f(x_1) = f(x_2)$, allora

$$h(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

quindi h deve necessariamente essere costante sulle fibre di f.

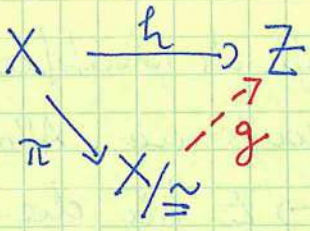
Viceversa, supponiamo che h sia costante sulle fibre di f. Allora posso definire

$g(y) = h(x)$ dove x è un qualunque elemento di X tale che $f(x) = y$.

Siccome $h = g \circ f$ è continua per ipotesi, la proprietà universale della topologia quoziente mi permette di concludere che $g: Y \to Z$ è continua.

Prendendo $Y = X/\cong$ e $f = \pi: X \to X/\cong$ otteniamo il

Corollario Sia $X/\cong$ uno spazio quoziente e sia $h: X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste un'applicazione continua $g: X/\cong \to Z$ tale che $g \circ \pi = h$ se e solo se h è costante sulle classi d'equivalenza di $\cong$



$g \circ \pi = h$

g esiste $\Leftrightarrow$ h è costante sulle classi d'equivalenza.

Ovviamente in tal caso g è definita come

$$g([x]) = h(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

e il valore di h non dipende dal rappresentante scelto per la classe d'equivalenza.

Osserviamo che se $f: X \to Y$ è una identificazione topologica, allora

X connesso $\Rightarrow$ Y connesso

X compatto $\Rightarrow$ Y compatto,

dato che f è suriettiva per definizione, dunque $f(X) = Y$ e sappiamo che immagini continue di connessi sono connessi ed analogamente per i compatti.

In particolare, spazi quozienti di spazi connessi [compatti] sono connessi [compatti].

Esempio Sia $X = \mathbb{R}$ con la relazione d'equivalenza $x_1 \cong x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$. Dimostriamo che lo spazio quoziente

$\boxed{\mathbb{R}/\cong \text{ è omeomorfo ad } S^1}$!

Consideriamo l'applicazione continua

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

Chiaramente $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$, dunque h

è costante sulle classi d'equivalenza di $\cong$. Pertanto esiste una funzione continua

$$g: \mathbb{R}/\cong \longrightarrow S^1 \quad \text{definita da}$$

$$g([x]) = h(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$$

Siccome h è suriettiva, anche g lo è. Inoltre g è iniettiva, in quanto

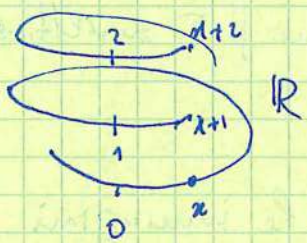
$$g([x_1]) = g([x_2]) \iff (\cos 2\pi x_1, \operatorname{sen} 2\pi x_1) = (\cos 2\pi x_2, \operatorname{sen} 2\pi x_2)$$
$$\iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \iff x_1 \cong x_2$$
$$\iff [x_1] = [x_2].$$

Quindi g è una biezione continua fra $\mathbb{R}/\cong$ e S^1.

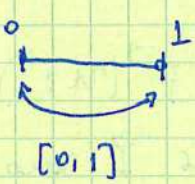
Ora osserviamo che $\mathbb{R}/\cong$ coincide con $[0,1]/\sim$, dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza che identifica 0 e 1. Siccome $[0,1]$ è compatto, lo stesso vale per $[0,1]/\sim$, dunque per $\mathbb{R}/\cong$. Allora

$$g: \mathbb{R}/\cong \longrightarrow S^1$$

è continua e biunivoca fra uno spazio compatto ed uno di Hausdorff, pertanto essa è un omeomorfismo. ∎

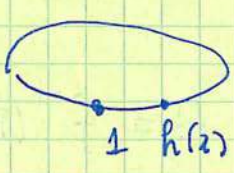


$\mathbb{R}$



$[0,1]$

$[0,1]/\sim$
(relazione d'equivalenza che identifica 0 e 1).



S^1

Def Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua.
Un sottinsieme $A \subset X$ si dice saturo rispetto ad f (o semplicemente saturo) se
$x \in A$ e $f(x) = f(y) \Rightarrow y \in A$

Equivalentemente, A è saturo se e solo se è della forma $f^{-1}(B)$ per qualche $B \subset Y$.

Prop Sia $f: X \to Y$ continua e suriettiva.
Allora sono equivalenti
(1) f è un'identificazione topologica (cioè su Y ho la topologia quoziente)
(2) gli aperti di Y sono tutti e soli gli insiemi della forma
$$\{ f(A) \mid A \text{ aperto saturo di } X \}$$

Dim
(1) $\Rightarrow$ (2) Se f è un'identificazione topologica, allora U è aperto in Y se e solo se
$$A = f^{-1}(U)$$
è un aperto saturo di X. Poiché f è suriettiva, ho
$$U = f(f^{-1}(U)) = f(A)$$
cioè gli aperti di Y sono tutte e sole le immagini di aperti saturi di X.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $U = f(A)$ con A saturo ho $A = f^{-1}(B)$ con $B \subset Y$ da cui
$$U = f(f^{-1}(B)) = B, \text{ cioè } f^{-1}(U) = A$$
(f suriettiva) e quindi su Y ho la topologia quoziente.

Osservazione importante Non tutti gli aperti di X sono saturi, quindi non è detto che le identificazioni topologiche siano mappe aperte in generale (vedremo un controesempio fra poco).

Diciamo che un'applicazione continua e suriettiva $f: X \to Y$ è un'identificazione aperta se è un'identificazione che è anche una mappa aperta. Analogamente, diremo che è un'identificazione chiusa se è un'identificazione che è anche una mappa chiusa. Ad esempio, un omeomorfismo è un'identificazione che è contemporaneamente aperta e chiusa.

Prop Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva.
- Se f è chiusa, allora f è un'identificazione chiusa
- Se f è aperta, allora f è un'identificazione aperta.

Dim Siccome f è suriettiva, per ogni sottinsieme $A \subseteq Y$ vale $f(f^{-1}(A)) = A$.

Supponiamo ora che f sia aperta, e mostriamo che è una identificazione. Dobbiamo mostrare che se $f^{-1}(A)$ è aperto in X allora $A \subseteq Y$ è aperto. Si ha $A = f(f^{-1}(A))$ e questo è aperto poiché f è aperta.
Il discorso con i chiusi è analogo ∎

Corollario Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff. Allora f è un'identificazione chiusa.

Dim Ogni applicazione continua da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff è necessariamente chiusa, dunque per la Proposizione precedente f è un'identificazione chiusa ∎

Osservazione / Esercizio Sia $f: X \to Y$ continua e surgettiva e sia $\cong$ la relazione d'equivalenza associata (cioè, $x \cong y \iff f(x)=f(y)$). Allora f è un'identificazione topologica se e solo se $X/\cong$ è omeomorfo ad Y.

Infatti, poiché $f: X \to Y$ è per definizione costante sulle classi di equivalenza di $\cong$, ho un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\cong \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & Y & \end{array} \qquad f = h \circ \pi \qquad h([x]) = f(x)$$

Poiché f è surgettiva, h continua.

h è chiaramente surgettiva, e inoltre è anche iniettiva: infatti

$$h([x]) = h([y]) \iff f(x) = f(y) \iff [x] = [y]$$

Allora basta dimostrare che sono equivalenti

(1) f ha la topologia quoziente (2) h è una mappa aperta.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia U aperto in $X/\cong$. Allora $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di X π-saturato, dunque anche f-saturato (dato che $\pi(x)=\pi(y) \iff f(x)=f(y)$)

Poiché su Y ho la topologia quoziente, $h(U) = f(\pi^{-1}(U))$ è aperto in Y.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sia $U \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(U)$ sia aperto. Poiché $f^{-1}(U)$ è f-saturato, esso è anche π-saturato dunque $\pi \circ f^{-1}(U)$ è aperto e, poiché h è aperta, $(h \circ \pi) f^{-1}(U) = f f^{-1}(U) = U$ è aperto.

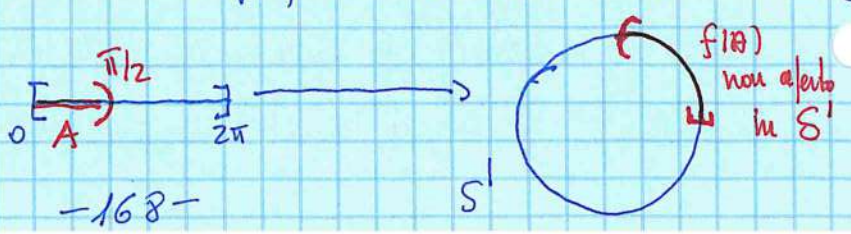
Dunque su Y ho la topologia quoziente ∎

Esempio 1 Identificazione chiusa che non è aperta.

Sia $f: [0, 2\pi] \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$

f è continua e surgettiva. Poiché $[0, 2\pi]$ è compatto e S^1 è di Hausdorff, segue dal Corollario precedente che f è un'identificazione chiusa.

Tuttavia, f non è una mappa aperta: ad esempio, $A = [0, \pi/2)$ è aperto in $[0, 2\pi]$ ma $f(A)$ non è aperto in S^1

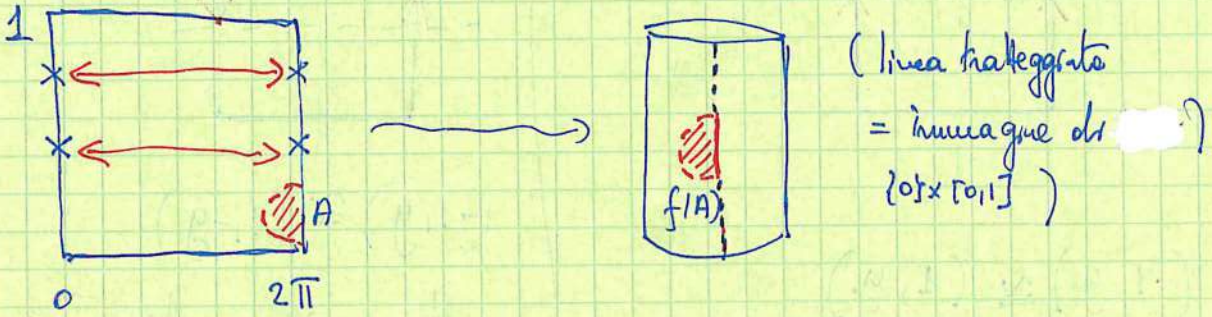


non f-saturo

Esempio 2 (Altro esempio di identificazione chiusa che non è aperta)

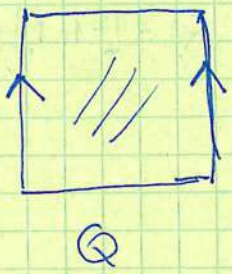
$$f: [0, 2\pi] \times [0,1] \longrightarrow S^1 \times [0,1] \qquad \text{Cilindro}$$
$$f(t, s) \longrightarrow ((\cos t, \sin t), s)$$

f è un'identificazione chiusa del rettangolo nel cilindro, e corrisponde alla relazione d'equivalenza che identifica il punto $(0, s)$ con il punto $(2\pi, s)$



Tale identificazione non è aperta: infatti se A è l'aperto (non saturo) di $[0, 2\pi) \times [0,1]$ in figura, la sua immagine $f(A)$ è chiaramente non chiusa nel cilindro.

Convenzionalmente, questa relazione d'equivalenza sul rettangolo (o, equivalentemente, nel quadrato) Q si indica come segue



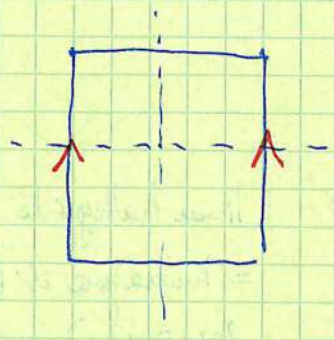
$Q/\sim$ è omeomorfo al cilindro

Esempio 3

(Nastro di Möbius)

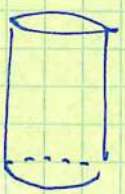
Si tratta di un'identificazione topologica sul quadrato Q, ma invece di identificare i lati opposti nello stesso senso si identificano "in senso contrario".

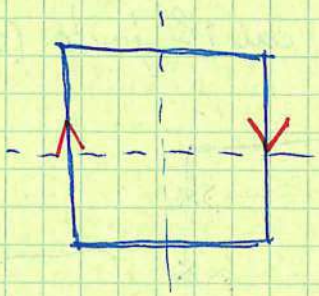
Se $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, ho la situazione seguente



$(-1, y) \cong (1, y)$

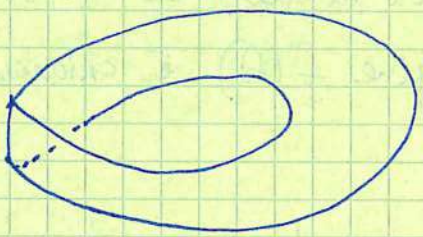
ottengo il cilindro





$(-1, y) \cong (1, -y)$

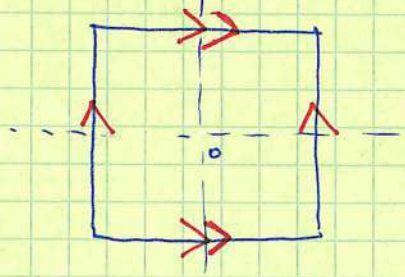
ottengo il nastro di Moebius



Esempio 4 (Toro)

Posso ottenere il Toro come spazio di identificazione "identificando" i lati opposti del quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ nello stesso senso, ossia

$(-1, y) \cong (1, y)$ e $(x, 1) \cong (x, -1)$



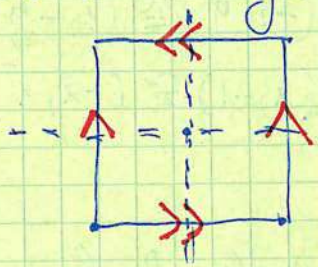
$Q/\cong$ è omeomorfo a

Infatti:

Esempio 5

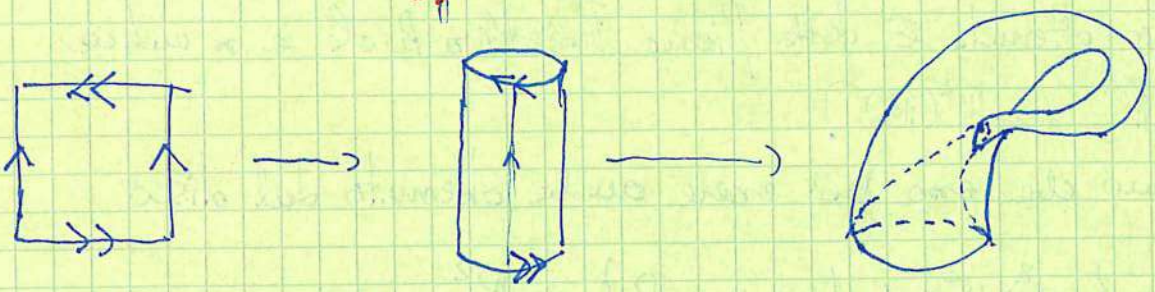
La bottiglia di Klein

Si tratta dello spazio quoziente ottenuto a partire dal quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ identificando due lati opposti nello stesso verso e gli altri due in verso opposto, come mostrato nel diagramma seguente:



$(-1, y) \cong (1, y)$

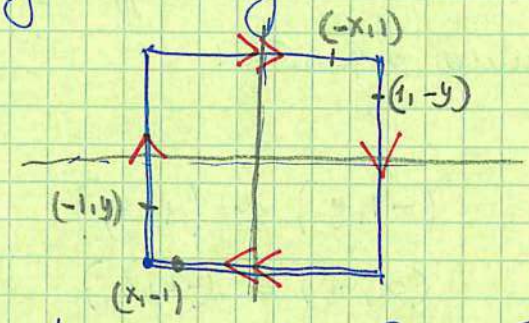
$(x, -1) \cong (-x, 1)$



La "superficie" in $\mathbb{R}^3$ così ottenuta ha necessariamente un'auto-intersezione (si dimostra che ciò è inevitabile se si vuole vedere la bottiglia di Klein nell'ordinario spazio 3-dimensionale).

Esempio 6 Il piano proiettivo reale.

Su ~~questo~~ questo spazio quoziente del quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$, entrambe le coppie di lati vengono identificate "in senso opposto", come mostrato dal diagramma seguente



$(-1, y) \cong (1, -y)$

$(x, -1) \cong (-x, 1)$

Lo spazio ottenuto è detto Piano Proiettivo Reale e si indica con $\mathbb{RP}^2$ (o $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)

Osserviamo che esso può essere anche ottenuto dal disco

$$\mathbb{D}^2 = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \mid x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$$

identificando ogni punto $(x, y) \in \partial \mathbb{D}^2 = S^1$ col suo antipodale $(-x, -y)$.

Vedremo poi una costruzione più generale di quello che si chiama lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$ di dimensione n.

Esempio 7 "Contrazione topologica di un sottoinsieme".

Consideriamo uno spazio topologico X e un sottoinsieme $A \subseteq X$.
Definiamo su X la seguente relazione d'equivalenza:

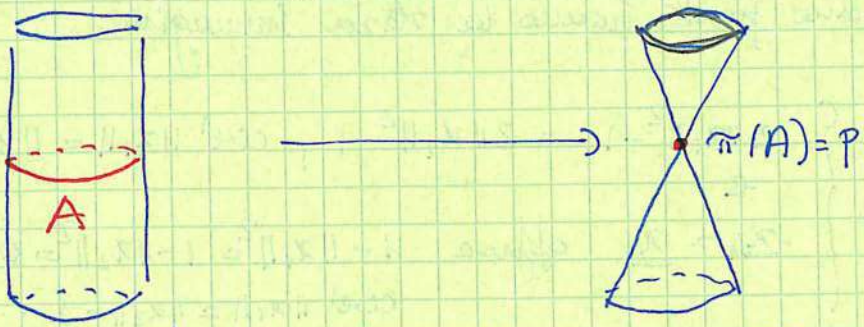
$$x \cong y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

In altre parole, tale relazione identifica tutto il sottoinsieme A ad un unico punto p. La proiezione sul quoziente

$$\pi : X \longrightarrow X/\cong$$

è detta "contrazione topologica del sottoinsieme A".

- Ad esempio, sia $X = S^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro (infinito) e sia A il "parallelo" $A := S^1 \times \{0\}$. Allora lo spazio quoziente $X/\cong$ si ottiene contraendo tale parallelo (che è un cerchio) ad un singolo punto, quindi $X/\cong$ è omeomorfo ad un cono (infinito, a due falde).



$X = S^1 \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $X/\cong$ è omeomorfo ad un cono.

• Un altro esempio di costruzione (talvolta) è il seguente

Sia $\mathbb{D}^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|^2 \leq 1\}$ il disco chiuso n-dimensionale

e $S^n = \{(y, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid y^2 + \|\underline{x}\|^2 = 1\}$ la n-sfera unitaria

e consideriamo l'applicazione

$$f : \mathbb{D}^n \longrightarrow S^n$$

$$f(\underline{x}) = \left(2\|\underline{x}\|^2 - 1,\ \left(2\sqrt{1-\|\underline{x}\|^2}\right) \cdot \underline{x}\right)$$

Si verifica agevolmente che $\|f(x)\| = 1$

Essa è continua e suriettiva, dunque è un'identificazione chiusa poiché $\mathbb{D}^n$ è compatto e S^n è di Hausdorff.

Si indichi con $\cong$ la relazione d'equivalenza indotta da f, ovvero

$$x \cong y \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = f(y)$$

si ha allora che lo spazio quoziente

$\mathbb{D}^n / \cong$ è omeomorfo ad S^n.

Come è fatta questa relazione d'equivalenza?

Vediamo quando due punti hanno la stessa immagine tramite f.

$$f(\underline{x}_1) = f(\underline{x}_2) \iff \begin{cases} 2\|x_1\|^2 - 1 = 2\|x_2\|^2 - 1, \text{ cioè } \|x_1\| = \|x_2\| \\ \text{e} \\ \underline{x}_1 = \underline{x}_2 \text{ oppure } 1 - \|x_1\|^2 = 1 - \|x_2\|^2 = 0, \\ \text{cioè } \|x_1\| = \|x_2\| = 1. \end{cases}$$

In altre parole

$$f(\underline{x}_1) = f(\underline{x}_2) \iff \underline{x}_1 = \underline{x}_2 \text{ oppure}$$
$$\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \partial\mathbb{D}^n = S^{n-1}$$

In altre parole, f è un omeomorfismo del disco aperto

$$\mathring{\mathbb{D}}^n = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|^2 < 1 \} \text{ su } S^n - \{(1, \underline{0})\},$$

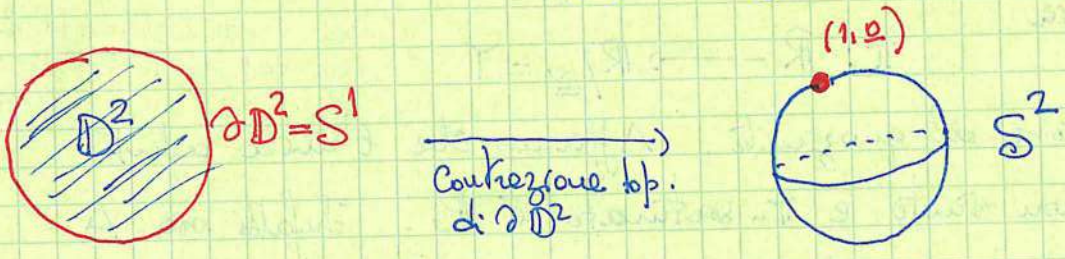
e $f(\partial \mathbb{D}^n) = \{(1, \underline{0})\}$.

Quindi ho la contrazione topologica del bordo del disco ad un punto, e lo spazio quoziente è omeomorfo a S^n

$\mathbb{D}^n / \cong$ è omeomorfo a S^n

$\cong$ relazione che contrae il bordo ad un punto.

In dimensione $n = 2$ ho la figura seguente:



Esempio 8 (Un quoziente di uno spazio T_2 non è necessariamente T_2).

Abbiamo visto che ogni quoziente di uno spazio connesso [rispettivamente, compatto] è a sua volta connesso [rispettivamente, compatto]. Invece, la proprietà "essere di Hausdorff" non è in genere conservata quando si passa al quoziente, come mostrato dal seguente esempio.

Consideriamo su $\mathbb{R}$ la relazione d'equivalenza

$$x \cong y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Mostriamo che $Y = \mathbb{R}/\cong$ ha la topologia banale $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$. Infatti, sia

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\cong = Y$$

la proiezione al quoziente. Affermo che l'unico aperto di $\mathbb{R}$ non vuoto e π-saturato è $\mathbb{R}$. Infatti sia A un tale aperto e supponiamo per assurdo che esista $b \in \mathbb{R}$ con $b \notin A$. Siccome l'aperto è saturato, ciò vuol dire $b + q \notin A$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ ~~(altrimenti avrei che $b = (b+q) - q$~~ (dato che $b + q \cong b$, dunque $\pi(b+q) = \pi(b)$)

Ciò vuol dire a sua volta

$$(b + \mathbb{Q}) \cap A = \emptyset, \text{ ossia } \mathbb{Q} \cap (A - b) = \emptyset.$$

Ma $A - b$ è un traslato di A, dunque è ancora un aperto di $\mathbb{R}$; pertanto abbiamo una contraddizione, dato che essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, esso deve intersecare ogni aperto non vuoto. ∎

da cui la tesi, dato che gli aperti di Y sono le immagini degli aperti π-saturi di $\mathbb{R}$

Azioni di gruppi - Quoziente per gruppi di omeomorfismi.

Uso la notazione additiva per i gruppi abeliani.

Azioni di gruppi

Sia X un insieme e G un gruppo. Diremo che G agisce (a sinistra) su X o che X è un G-insieme se esiste una funzione a meno di non dire esplicitamente il contrario.

$$G \times X \longrightarrow X \quad \text{indicata con} \quad (g, x) \longrightarrow g \cdot x$$

tale che
$$\begin{cases} (a)\ 1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in X \quad (\text{dove } 1 \in G \text{ è l'elemento neutro}) \\ (b)\ g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall\, g, h \in G,\ x \in X \end{cases}$$

Se X è un G-insieme, per ogni $g \in G$ la funzione $\theta_g : X \longrightarrow X$ definita da $x \longrightarrow g \cdot x$ è una biezione.

Infatti dalla definizione di G-insieme segue che

$$(\theta_g \circ \theta_{g^{-1}})(x) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(x)) = \theta_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x)$$
$$= (g \cdot g^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

dunque $\theta_g \cdot \theta_{g^{-1}} = Id_X$. Allora θ_g è invertibile (con inversa $\theta_{g^{-1}}$), in particolare è biettiva.

Esempio 1 Ogni gruppo G agisce su se stesso per moltiplicazione a sinistra. In altre parole, ho un'applicazione

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longrightarrow g \cdot h$$

Esempio 2 Sia $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$. Allora ho un'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ data per traslazione, in altre parole

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(n, x) \longrightarrow n + x$$

Allora $\theta_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la traslazione per n, cioè

$$\theta_n(x) = x + n$$

Possiamo generalizzare quest'esempio in ogni dimensione, ottenendo un'azione di $\mathbb{Z}^k$ su $\mathbb{R}^k$ data da

$$\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$(n_1, \dots, n_k) \cdot (x_1, \dots, x_k) = (x_1 + n_1, \dots, x_k + n_k)$$

- **Esempio 3** Sia $\mathbb{Z}_2$ il gruppo di ordine 2, che indico con notazione moltiplicativa $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$
Allora posso definire un'azione di $\mathbb{Z}_2$ su $\mathbb{R}^{n+1}$ come "moltiplicazione per -1":

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(-1) \cdot (x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

L'applicazione $\theta_{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ è semplicemente la moltiplicazione per -1.
Se $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \|x\| = 1\}$ è la sfera n-dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$, allora $x \in S^n \Rightarrow -x \in S^n$, dunque l'azione descritta sopra si restringe ad un'azione

$$\mathbb{Z}_2 \times S^n \longrightarrow S^n$$

$$(-1) \cdot x = -x$$

Sia ora $\mathrm{Bij}(X)$ il gruppo delle biezioni $X \to X$

$$\mathrm{Bij}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ biettiva}\}$$

Si tratta di un gruppo con l'operazione di composizione.
L'elemento neutro è l'identità 1_X, e l'inverso di f è la funzione inversa f^{-1} (che esiste in quanto f è per ipotesi biettiva).

Posso anche usare la notazione (forse migliore) $\mathrm{Perm}(X)$

Se il gruppo G agisce su X, ho una funzione

$$\theta : G \longrightarrow Bij(X)$$
$$g \longrightarrow \theta_g$$

Prop $\theta : G \longrightarrow Bij(X)$ è un omomorfismo di gruppi.

Dim Si ha

- $\theta(1) = \theta_1 = id_X$
- $\theta(gh) = \theta_{gh}$ - D'altra parte

$$\theta_{gh}(x) = (gh)(x) = g \cdot (h(x)) = g \cdot \theta_h(x) = \theta_g(\theta_h(x))$$
$$= (\theta_g \circ \theta_h)(x)$$

ossia

$$\theta(gh) = \theta(g) \cdot \theta(h)$$

∎

Definizione L'azione di G su X si dice **fedele** se θ è iniettiva, ovvero se $\ker(\theta) = 1_G$

Se l'azione di G è fedele, posso vedere G come sottogruppo di $Bij(X)$ (identificando G con $\theta(G) \subset Bij(X)$).

Se l'azione non è fedele, $\ker\theta$ è non banale, ma in ogni caso per il 1° teorema fondamentale di isomorfismo ho un isomorfismo di gruppi

$$Im\,\theta \cong G/\ker\theta$$

dunque in questo caso non è G che vedo come sottogruppo di $Bij(X)$, ma $G/\ker\theta$.

Le azioni descritte negli esempi 1, 2, 3 sopra sono tutte azioni fedeli. Un altro esempio di azione fedele è il seguente

Esempio 4 Sia X un poligono regolare di n lati in $\mathbb{R}^2$, e sia $D_{2\cdot n}$ il gruppo diedrale di ordine $2n$ (generato da una rotazione ρ di $\frac{2\pi}{n}$ e una riflessione s rispetto ad una asse, con la relazione $\rho s = s\rho^{-1}$). Allora D_{2n} agisce fedelmente su X.

Per ~~dare~~ un esempio di azione non fedele, consideriamo il seguente

Esempio 5 Sia G un gruppo. Oltre che per moltiplicazione a sinistra, possiamo far agire G su se stesso per coniugio, ossia considerare

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longrightarrow ghg^{-1}$$

è che $\theta_g : G \to G$, $h \to ghg^{-1}$ è un automorfismo di G per ogni $g \in G$.

È facile vedere che si tratta di un'azione. Allora ho un omomorfismo di gruppi

$$\theta : G \longrightarrow Aut(G)$$
$$\theta(g) = \theta_g \qquad \theta_g(h) = ghg^{-1}$$

(gruppo degli automorfismi di G)

L'automorfismo $\theta_g : G \to G$ è detto <u>automorfismo interno</u> quindi $\mathrm{Im}\,\theta$ è il sottogruppo di $Aut(G)$ dato dagli automorfismi interni. Osserviamo che

$$\ker\theta = \{g \in G \mid \theta_g = 1_G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in G\}$$
$$= \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G\} = Z(G)$$

ossia il nucleo di θ coincide con il centro $Z(G)$ di G. Pertanto l'azione di coniugio è fedele $\iff$ il centro di G è banale.
Vi sono molti esempi di gruppi (necessariamente non commutativi) per il quale il centro è non banale.
Ad esempio

$$Z(\mathbb{Z}_2 \times S_3) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$Z(D_{2n}) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{se } n \text{ è pari}$$
(mentre è banale se n è dispari)

Indicando con $\mathrm{Inn}(G)$
il sottogruppo degli automorfismi interni di G, il Primo Teorema di Isomorfismo ci dà

$$\boxed{G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)}$$

Gruppi di omeomorfismi

Sia X uno spazio topologico, ed indichiamo con $\mathrm{Omeo}(X)$ l'insieme degli omeomorfismi di X in se stesso, ossia le $f : X \to X$ bicontinue e biettive.
Siccome l'identità è un omeomorfismo, la composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo e l'inverso di un omeomorfismo è un omeomorfismo, segue che $\mathrm{Omeo}(X)$ ha la struttura di gruppo con la composizione.
Ora possiamo dare l'importante concetto di G-spazio.

Def Sia X uno spazio topologico e sia G un gruppo che agisce su X. Diremo che X è un G-spazio se per ogni $g \in G$ la funzione di X in sé

$$\theta_g : X \longrightarrow X$$
$$\theta_g(x) := g \cdot x$$

è continua.

Abbiamo già dimostrato che ho un omomorfismo di gruppi $\theta : G \longrightarrow Bij(X)$. Nel caso in cui X è un G-spazio, ognuna delle frecce θ_g è continua con inversa $\theta_{g^{-1}}$, che è anch'essa continua. Dunque ogni θ_g è un omeomorfismo, ed ottengo un omomorfismo di gruppi

$$\theta : G \longrightarrow Omeo(X)$$
$$\theta(g) = \theta_g$$

Supponiamo che l'azione sia fedele, cioè che $\ker \theta = 1_G$ (in altre parole, che l'unico elemento di G che induce l'omeomorfismo identico sia 1_G). Allora posso identificare (tramite il I teorema di Isomorfismo) G con la sua immagine in $Omeo(X)$, cioè vedere G come sottogruppo di $Omeo(X)$.
Quindi ho una corrispondenza biunivoca

{ Strutture di G-spazio fedele su X } $\longleftrightarrow^{1:1}$ { Sottogruppi G di $Omeo(X)$ }

~~Esempio: Da tutte le azioni fedeli l'azione di X~~

Esempi di G-spazi

① $G = \mathbb{Z}^n$, $X = \mathbb{R}^n$, azione per traslazione

② $G = \mathbb{Z}_2$, $X = \mathbb{R}^{n+1}$, azione data dalla moltiplicazione per -1

③ $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^n$, azione data dalla moltiplicazione per -1

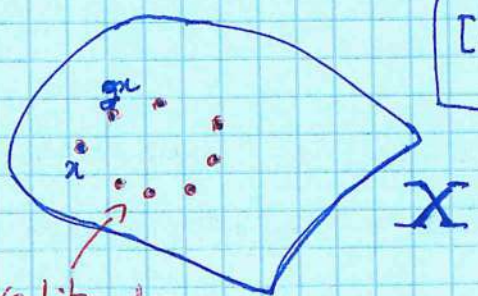
④ $G = D_{2n}$, $X =$ poligono regolare di n lati $\subset \mathbb{R}^2$, azione data come gruppo di rotazioni e riflessioni.

Sia ora G un gruppo che agisce su X. Posso dare allora una relazione d'equivalenza $\cong$ su X come segue:

$$x \cong y \iff \text{Esiste } g \in G \text{ tale che } gx = y$$

La corrispondente classe d'equivalenza $[x]$ viene detta l'orbita dell'elemento x sotto l'azione di G (il nome viene dal fatto che se il gruppo G è finito allora l'orbita è un insieme finito che "ritorna su se stesso")

$$[x] = \{ g \cdot x \mid g \in G \} \subset X$$



Orbita di x quando G è un gruppo finito.

L'insieme delle orbite, ovvero l'insieme quoziente $X/\cong$, si indica in questo caso con X/G ed è detto

l'insieme quoziente di X modulo G

Si ha la proiezione al quoziente data da

$$\pi : X \longmapsto X/G$$
$$\pi(x) = \text{orbita di } x = \{gx \mid x \in G\}$$

Se X è uno spazio topologico su cui un gruppo G agisce come gruppo di omeomorfismi (cioè, X è un G-spazio) posso considerare la topologia quoziente sullo spazio quoziente X/G

$$U \subset X/G \text{ è aperto} \iff \pi^{-1}(U) \text{ è aperto.}$$

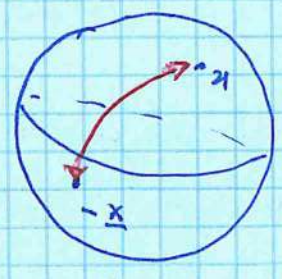
In questo modo ottengo uno spazio topologico che si chiama spazio quoziente di X modulo G.

Esempio 1

- $G = \mathbb{Z}$ che agisce su $\mathbb{R}$ come gruppo di traslazioni, cioè
$$n \cdot x = n + x$$
La relazione d'equivalenza associata è
$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$
dunque
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

- $G = \mathbb{Z}_2$ che agisce su S^n come $(-1)\cdot \underline{x} = -\underline{x}$
Allora la relazione d'equivalenza associata è
$\underline{x} \sim \underline{y} \iff \underline{x}$ e $\underline{y}$ sono punti antipodali di S^n.
Allora $S^n/\mathbb{Z}_2$ è lo spazio topologico ottenuto dalla n-sfera identificando coppie di punti antipodali

Esso viene detto spazio proiettivo reale n-dimensionale ed indicato con $\mathbb{RP}^n$ (oppure con $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, o $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$).



Possiamo dare un'altra descrizione di $\mathbb{RP}^n$ come segue.
Consideriamo la semisfera superiore

$$S^n_+ := \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0 \}$$

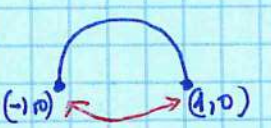
Allora ogni punto in S^n_+ è equivalente solo a se stesso rispetto alla relazione che identifica i punti antipodali, a meno che non si trovi nell'equatore

$$S^n_+ \cap \{ x_{n+1} = 0 \} = \{ (x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$$

Dunque

$\mathbb{RP}^n$ è omeomorfo a $S^n_+ / \cong$

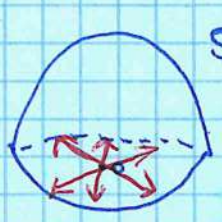
dove $\cong$ è la relazione che identifica i punti antipodali sull'equatore.

Esempio ($n=1$) $S^1_+ =$ 

Allora $\cong$ è la relazione su S^1_+ che identifica $(1,0)$ con $(-1,0)$, pertanto

$\mathbb{RP}^1$ è omeomorfo a S^1.

Esempio ($n=2$) $S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$



La relazione d'equivalenza $\cong$ identifica i punti antipodali sull'equatore di S^2_+, cioè su $\{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$

In altre parole

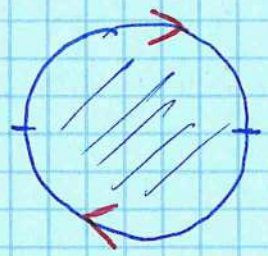
$$(x,y,z) \cong (x',y',z') \iff \begin{cases} z=z'=0 \\ x=-x' \\ y=-y' \end{cases}$$

"Schiacciando" S^2_+ sul piano è chiaro che posso anche vedere $\mathbb{RP}^2$ come lo spazio topologico

$$D^2/\cong$$

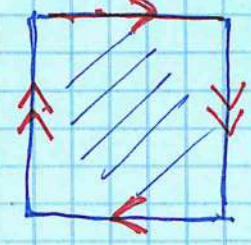
dove D^2 è il disco chiuso $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ e $\cong$ è la relazione d'equivalenza che identifica punti antipodali nella frontiera $S^1 = \partial D^2 = \{x^2+y^2=1\}$

Come spazio di identificazione ho il diagramma seguente



dove il verso opposto delle due frecce indica che sono i punti antipodali ad essere identificati.

Altro modello (come spazio di identificazione del quadrato):



Un'importante proprietà delle identificazioni topologiche associate ad un G-spazio è la seguente:

Proposizione
Se X è un G-spazio, la proiezione canonica
$$\pi : X \longrightarrow X/G$$
è un'identificazione aperta.

Dim Ogni proiezione al quoziente è un'identificazione. Dobbiamo solo mostrare che π è una mappa aperta. Sia $U \subseteq X$ aperto e consideriamo $\pi^{-1}(\pi(U))$. Si ha

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} \\
&= \{x \in X \mid \pi(x) = \pi(y) \text{ per qualche } y \in U\} \\
&= \{x \in X \mid x = g \cdot y \text{ per qualche } g \in G,\ y \in U\} \\
&= \{x \in X \mid x \in g \cdot U \text{ per qualche } g \in G\} \\
&= \bigcup_{g \in G} (g \cdot U)
\end{aligned}$$

Poiché l'azione di g su X è un omeomorfismo e U è aperto, segue che $g \cdot U$ è aperto $\forall g \in G$, dunque (essendo l'unione di aperti è aperta) deduciamo che $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in X. Allora, per definizione di topologia quoziente, segue che $\pi(U)$ è aperto in X/G, ossia π è una mappa aperta. ∎

Esempio in cui $\pi : X \to X/G$ non è chiusa

Sia $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Q}$. Allora sappiamo che $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ha la topologia banale. Siccome $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è una mappa aperta per la Proposizione precedente, segue che per ogni aperto A di $\mathbb{R}$ deve essere

$$\pi(A) = \mathbb{R}/\mathbb{Q},$$

in altri termini $\forall x \in \mathbb{R}$ esistono $a \in A$ e $q \in \mathbb{Q}$ tali che $x = a + q$. Infatti, se così non fosse allora $(-x + A) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, ma ciò è assurdo dato che $-x + A$ è aperto in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ è denso, dunque interseca ogni aperto.

Tuttavia, notiamo che π non è una mappa chiusa in questo esempio: infatti un qualsiasi punto $x \in \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, ma $\pi(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è chiuso (gli unici chiusi sono $\emptyset$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$).

Una semplice situazione in cui $\pi : X \to X/G$ è anche chiusa è la seguente

Proposizione Sia X un G-spazio, dove G è un gruppo finito. Allora la proiezione canonica

$$\pi : X \to X/G$$

è un'identificazione sia aperta che chiusa.

Dim Resta solo da verificare che π è un'applicazione chiusa in questo caso. Sia $C \subseteq X$ un chiuso. Come prima, basta scrivere

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} (g \cdot C)$$

Siccome la moltiplicazione per $g \in G$ è un omeomorfismo di $\bar{X}$ in sé, segue che $g \cdot C$ è chiuso per ogni $g \in G$. Per ipotesi G è un gruppo finito, dunque siccome l'unione finita di chiusi è chiusa otteniamo che $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso in $\bar{X}$. Per definizione di topologia quoziente, questo implica che $\pi(C)$ è chiuso in X/G, cioè

$$\pi : X \longrightarrow X/G \text{ è un'applicazione chiusa.} \quad \blacksquare$$

Esempio Consideriamo

$$\pi : S^n \longrightarrow S^n/\mathbb{Z}_2 =: \mathbb{R}P^n.$$

Allora π è una identificazione che è più aperta che chiusa.

Sappiamo che in generale il quoziente X/G di uno spazio di Hausdorff X può non essere Hausdorff, ad esempio $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ha la topologia banale. Il risultato seguente dà un criterio affinché X/G sia di Hausdorff:

Proposizione Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e G un gruppo *finito* di omeomorfismi di X. Allora il G-spazio X/G è ancora uno spazio di Hausdorff.

Dim Siano $e = g_0, g_1, \dots, g_n$ gli elementi del gruppo G. Siano $p, q \in X/G$ due punti distinti e scegliamo due punti $x, y \in X$ tali che $\pi(x) = p$, $\pi(y) = q$, dove $\pi : X \to X/G$ è la proiezione canonica.

Siccome X è di Hausdorff, per ogni indice $i = 0, \dots, n$ possiamo trovare una coppia (U_i, V_i) di aperti di X tale che

$$x \in U_i, \quad g_i(y) \in V_i \quad \text{e} \quad U_i \cap V_i = \phi.$$

Consideriamo ora i due aperti

$$U = \bigcap_{i=0}^{n} U_i, \quad V = \bigcap_{i=0}^{n} g_i^{-1}(V_i)$$

che sono un intorno aperto di x e un intorno aperto di y, rispettivamente.
Ora dimostriamo che $U \cap g(V) = \phi$ per ogni $g \in G$.
Infatti, se $g = g_i$, si ha, dato che $U \subset U_i$ e $V \subset g^{-1}(V_i)$:

$$U \cap g(V) \subseteq U_i \cap V_i = \phi$$

Osserviamo che questo a sua volta implica

$$g_i(U) \cap g_j(V) = \phi \quad \text{per ogni coppia } i, j.$$

Infatti, se $g_i(U) \cap g_j(V)$ fosse non vuoto, lo stesso varrebbe per $g_i^{-1}(g_i(U) \cap g_j(V)) = U \cap (g_i^{-1} g_j)(V)$, contraddizione con quanto visto prima (prendendo $g = g_i^{-1} g_j$).

A questo punto osserviamo che, essendo π una mappa aperta, $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono due aperti di X/G che contengono p e q, rispettivamente. Rimane solo da far vedere che $\pi(U) \cap \pi(V) = \phi$. Essendo $\pi : X \to X/G$ suriettiva, basta mostrare che $\pi^{-1}(\pi(U) \cap \pi(V)) = \phi$. Infatti

$$\pi^{-1}(\pi(U) \cap \pi(V)) = \pi^{-1}(\pi(U)) \cap \pi^{-1}(\pi(V)) = \left(\bigcup g_i \cdot U\right) \cap \left(\bigcup g_j \cdot V\right)$$

$$= \bigcup_{i,j} [(g_i \cdot U) \cap (g_j \cdot V)] = \phi$$

Esempio 1, Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ è uno spazio di Hausdorff. Infatti esso è il quoziente dello spazio di Hausdorff S^n per il gruppo finito $\mathbb{Z}_2$ che agisce come $(-1)\cdot \underline{x} = -\underline{x}$

Esempio 2 Sia $X = \mathbb{R}^2$ e consideriamo l'azione di $G = \mathbb{Z}_2 = \langle \xi \mid \xi^2 = 1 \rangle$ su $\mathbb{R}^2$ data da

$$\xi \cdot (x, y) = (y, x) \quad \text{(riflessione rispetto alla retta } x-y=0)$$

Allora il quoziente X/G è uno spazio di Hausdorff (non è difficile dimostrare che esso è omeomorfo ad un semipiano chiuso).

Introduzione alla topologia Algebrica: il Gruppo Fondamentale

L'idea è quella di associare (in modo funtoriale) ad ogni spazio topologico X un gruppo, detto gruppo fondamentale di X (o primo gruppo di omotopia di X) che permetta di distinguere spazio da loro non omeomorfi, come ad esempio i tre spazi seguenti:

S^2

T^2

$T^2 \# T^2$

Gruppo fond. $\{1\}$ $\quad\quad$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\quad\quad$ Non abeliano.

Allo scopo di introdurre il gruppo fondamentale, è necessario introdurre l'importante concetto di omotopia.

Def (Omotopia di funzioni continue)
Siano $f, g: Y \to X$ due funzioni continue dallo spazio topologico Y nello spazio topologico X. Diremo che f, g sono <u>omotope</u> se esiste una funzione continua F (detta omotopia) tale che

$$F: Y \times I \longrightarrow X \qquad I=[0,1] \text{ con top. euclidea}$$
$$F(y,0) = f(y) \qquad \forall y \in Y$$
$$F(y,1) = g(y)$$

Possiamo dunque vedere $F(y,t)$ come una famiglia dipendente con continuità dal parametro t, cioè $\{f_t\}_{t\in I}$, $f_t(\cdot) = F(\cdot, t)$, in modo tale che $f_0 = f$, $f_1 = g$; se f e g sono omotope, scriveremo $f \simeq g$.

<u>Esempio</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Allora due qualsiasi mappe $f, g: Y \to X$ sono fra loro omotope

per mezzo di un omotopia lineare

$$F(y,t) := (1-t)f(y) + t\,g(y)$$

Def (Omotopia relativa ad un sottoinsieme)
Sia $A \subseteq Y$ un qualsiasi sottoinsieme. Diremo che f e g sono <u>omotope relativamente ad A</u> se esiste un'applicazione

$$F : Y \times I \longrightarrow X \quad \text{tale che}$$

$$F(y,0) = f(y) \qquad \forall\, y \in Y$$
$$F(y,1) = g(y)$$
$$F(a,t) \text{ non dipende da } t \qquad \forall\, a \in A$$
$$(= f(a) = g(a) \longleftarrow \text{quando } f|_A = g|_A)$$

In tal caso, scriveremo $f \simeq_A g$. Si noti che $\simeq$ è un caso particolare di $\simeq_A$, prendendo $A = \phi$.

Oss. L'ultima condizione può riscriversi come

$$f_t(a) = f(a) = g(a) \qquad \forall\, t \in I,$$

cioè i valori assunti dalle funzioni $f_t(\cdot) = F(\cdot, t)$ nei punti di A non dipendono da t.

Proposizione Per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$, si ha che $\simeq_A$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme $\mathcal{C}(Y, X)$ delle funzioni continue $Y \longrightarrow X$

Dim <u>Riflessività</u>: $f \simeq_A f$ tramite $F(y,t) = f(y)$

<u>Simmetria</u>: Se $f \simeq_A g$ tramite $F(y,t)$, allora $g \simeq_A f$ tramite $G(y,t) := F(y, 1-t)$

<u>Transitività</u> Supponiamo $f \simeq_A g$ tramite F e $g \simeq_A h$ tramite G. Allora $f \simeq_A h$ tramite l'omotopia

$$H(y,t) := \begin{cases} F(y,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(y,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

← Esercizio: verificare che $H : Y \times I \to X$ è una funzione continua.

Definizione (Equivalenza omotopica)
Due spazi topologici X, Y sono detti **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue

$$f: X \to Y \quad e \quad g: Y \longrightarrow X$$

tali che

$$g \circ f \simeq 1_X \,, \quad f \circ g \simeq 1_Y$$

↑ o che "hanno lo stesso tipo di omotopia"

In tal caso le funzioni continue f, g sono dette **equivalenze omotopiche**.

Osserviamo che due spazi topologici omeomorfi sono chiaramente omotopicamente equivalenti, dato che ogni omeomorfismo è per definizione un'equivalenza omotopica, Il viceversa in generale non vale, come mostrato dal risultato seguente:

Proposizione Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Allora X è omotopicamente equivalente ad un punto.

In particolare, tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti fra loro.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto, e consideriamo le due applicazioni continue seguenti:

$$f: X \to \{x_0\} \quad \text{applicazione costante}$$
$$g: \{x_0\} \longrightarrow X \quad \text{inclusione}.$$

Ovviamente $f \circ g$ è l'identità su $\{x_0\}$, pertanto resta solo da dimostrare che $g \circ f : X \to X$ è omotopa all'identità su X (si noti che $g \circ f$ è la funzione che

vole costantemente x_0). Qui usiamo in modo essenziale l'ipotesi di convessità, costruendo un'omotopia come segue:

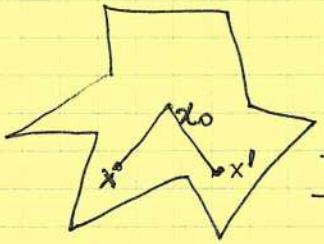
$$F: X \times I \longrightarrow X$$
$$F(x,t) = (1-t)x + t x_0$$

Essa esiste dato che per ipotesi il segmento $(1-t)x + t x_0$ è tutto contenuto in X per ogni scelta di $x \in X$.
Si ha

$$F(x,0) = x = 1_X(x)$$
$$F(x,1) = x_0 = g \circ f(x) \qquad \forall x \in X,$$

dunque F fornisce l'omotopia che cercavamo fra 1_X e $g \circ f$. ∎

Oss 1) Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice "stellato" ("star-shaped", in inglese) se esiste un punto $x_0 \in X$ tale che per ogni $x \in X$ il segmento $\overline{x_0 x} = \{(1-t)x + t x_0 \mid t \in [0,1]\}$ sia contenuto in X. Ovviamente convesso $\Rightarrow$ stellato, ma il viceversa è in genere falso.



X è stellato ma non convesso.

Allora esattamente la stessa dimostrazione della Proposizione precedente mostra che se X è stellato allora esso è omotopicamente equivalente a $\{x_0\}$, in altre parole

[tutti i sottoinsiemi stellati $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti ad un punto (quindi, in particolare, sono tutti omotopicamente equivalenti fra loro).]

In fatti ora dimostreremo che l'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella categoria degli spazi topologici.
Cominciamo con il seguente

Lemma

(1) Supponiamo di avere mappe continue

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z \qquad \text{e sia } A \subseteq X$$

Se $f \simeq_A g$, allora $h \circ f \simeq_A h \circ g$

(2) Supponiamo di avere mappe continue

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \qquad \text{e sia } B \subseteq Y.$$

Se $g \simeq_B h$, allora $g \circ f \simeq_{f^{-1}B} h \circ f$

Dim

(1) Sia $F(x,t)$ un'omotopia fra f e g relativa ad A, e consideriamo

$$X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{h} Z$$

Allora $h \circ F : X \times I \longrightarrow Z$ è un'omotopia relativa ad A fra $h \circ f$ e $h \circ g$.

Infatti
$\forall x \in X$:
$$(h \circ F)(x,0) = h(F(x,0)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$$
$$(h \circ F)(x,1) = h(F(x,1)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

Se $a \in A$, si ha $(h \circ F)(a,t) = h(F(a,t))$

Dunque, siccome $F(a,t)$ non dipende da t, lo stesso vale per $(h \circ F)(a,t)$ - Segue che $h \circ f \simeq_A h \circ g$

(2) Sia $G(y,t)$ un'omotopia fra g e h, relativa ad A, e poniamo

$$F: X\times I \longrightarrow Z\,, \quad F(x,t) := G(f(x),t)$$

Affermo che F è un'omotopia, relativa a $f^{-1}B \subseteq X$, fra $g\circ f$ e $h\circ f$.

Infatti:

$$F(x,0) = G(f(x),0) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$$
$$F(x,1) = G(f(x),1) = h(f(x)) = (h\circ f)(x)$$

Dunque F è un'omotopia fra $g\circ f$ e $h\circ f$. Sia ora $a\in f^{-1}B$. Allora $f(a)=b\in B$ e inoltre

$$F(a,t) = G(f(a),t) = G(b,t)$$

che non dipende da t in quanto per ipotesi G è un'omotopia relativa ad A. Quindi

$g\circ f \simeq_{f^{-1}B} h\circ f$ per mezzo dell'omotopia F ∎

Corollario $\simeq_A$ è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{C}(X,Y)$, l'insieme delle funzioni continue da X a Y.

Dim Riflessività e Simmetria sono ovvie. Resta da mostrare la transitività. Supponiamo $f\simeq_A g$ e $g\simeq_A h$

Corollario "Essere omotopicamente equivalenti" è una relazione d'equivalenza fra spazi topologici.

Dim Riflessività e Simmetria sono ovvie, resta da mostrare la transitività: Supponiamo che X sia omotopicamente eq. a Y e Y sia omotopicamente eq. a Z. Allora esistono funzioni continue

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y\,, \quad Y \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} Z \quad \text{con } g\circ f\simeq 1_X,\ f\circ g\simeq 1_Y,\ v\circ u\simeq 1_Y,\ u\circ v\simeq 1_Z.$$

per cui $(u\circ f)\circ(g\circ v) \simeq u\circ(f\circ g)\circ v \simeq u\circ 1_Y\circ v = u\circ v \simeq 1_Z$

$$(g\circ v)\circ(u\circ f) = g\circ(v\circ u)\circ f \simeq g\circ 1_Y\circ f = g\circ f \simeq 1_X$$ ∎

Osservazione Sia X uno spazio topologico. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:

(1) X è omotopicamente equivalente ad un punto

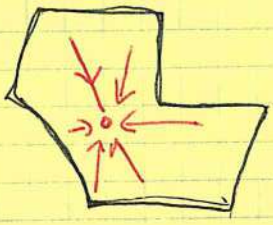
(2) L'identità $1_X : X \to X$ è omotopa ad una funzione costante.

Infatti, X è omotopicamente equivalente a $\{x_0\}$ se e solo se esistono due funzioni continue $f: X \to \{x_0\}$, $g: \{x_0\} \to X$ tali che $g \circ f : X \to X$ è omotopa all'identità 1_X - Ma ovviamente $(g \circ f)(x) = x_0 \ \forall x \in X$, cioè $g \circ f$ è costante ∎

[**Def** Uno spazio topologico che soddisfa una delle condizioni equivalenti (1), (2) scritte sopra è detto **CONTRAIBILE**]

Da quanto detto, segue che **ogni sottoinsieme stellato $X \subset \mathbb{R}^n$ è contraibile**. Osserviamo che non si può sostituire la condizione "stellato" con quella più debole "connesso per archi": infatti dimostreremo che, ad esempio, S^1 (che è connesso per archi) **non** è contraibile.

Intuitivamente, uno spazio contraibile è uno spazio che può essere "schiacciato con continuità ad un punto"



$\simeq \{\cdot\}$

Notazione Se x_0 è un punto indicheremo con ϵ_{x_0} la funzione costante x_0, per cui ad esempio

X è contraibile $\overset{\text{def}}{\iff} 1_X \simeq \epsilon_{x_0}$

Retrazioni

Definizione (Retrazione, Retratto di deformazione, Retratto forte)

Sia X uno spazio topologico, ~~$\dots$~~ $A \subseteq X$ un sottospazio e $i : A \hookrightarrow X$ la corrispondente mappa di inclusione.

(1) Una **retrazione** di X su A è una funzione continua $r : X \to A$ tale che $r \circ i = 1_A : A \to A$ (in altre parole, $r|_A = 1_A$). Se una tale retrazione esiste, diremo che A è un **retratto** di X

(2) Diremo che A è un **retratto per deformazione** di X se esiste una retrazione $r : X \to A$ tale che $i \circ r : X \to X$ sia omotopa a $1_X : X \to X$.

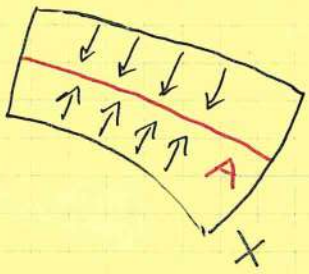
$$\boxed{r \circ i = 1_A \,, \quad i \circ r \simeq 1_X}$$

(3) Diremo che A è un retratto **forte** per deformazione di X se è un retratto per deformazione di X e in più l'omotopia tra $i \circ r$ e 1_X può essere scelta relativamente ad A, ossia

$$\boxed{r \circ i = 1_A \,, \quad i \circ r \simeq_A 1_X}$$

Osserviamo che se A è un retratto per deformazione di X (non necessariamente forte) allora A e X sono omotopicamente equivalenti.

Intuitivamente, A è un retratto per deformazione di X se X può essere "deformato con continuità" fino a farlo coincidere con A, ed è un retratto **forte** per deformazione se ogni punto $a \in A$ rimane fisso durante il processo di deformazione.



A è un retratto fo deformazione forte di X.

Oss X è contraibile se e solo se esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $\{x_0\}$ è un retratto fo deformazione di X.

Attenzione: vi sono spazi contraibili che non sono retratto forte fo deformazione (esempio sotto)

Esempio 1 Un sottoinsieme convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ ammette come retratto forte di deformazione qualsiasi suo punto $x_0 \in X$. Infatti, posto:

$i: \{x_0\} \hookrightarrow X$, $r: X \to \{x_0\}$

$i \circ r = \varepsilon_{x_0}$ e si ha $\varepsilon_{x_0} \simeq_{\{x_0\}} 1_X$ tramite un omotopia lineare

$$F(x,t) = (1-t)x_0 + tx$$

Si noti che $f_t(x) = (1-t)x_0 + tx$ quindi

$$f_t(x_0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0$$

quindi il punto x_0 rimane fissato durante l'omotopia, quindi il retratto è effettivamente forte.

Esempio 2 Consideriamo $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Allora X ammette come retratto forte fo deformazione la circonferenza unitaria $S^1 = \{x^2+y^2=1\}$. Infatti sia

$i: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione e $r: \mathbb{R}^2 - \{0\} \to S^1$

$$r(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$$

(ben definita in quanto $0 \notin \mathbb{R}^2 - \{0\}$)

Se $\underline{x} \in S^1$ allora $\|\underline{x}\| = 1$, dunque $r(\underline{x}) = \underline{x}$ $\forall \underline{x} \in S^1$ e di conseguenza r è una retrazione.

Resta da dimostrare che

$$i \circ r \simeq_{S^1} 1_{\mathbb{R}^2 - \{0\}}$$

Costruiamo la nostra omotopia come segue:

$$F : (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$$
$$F(x, t) = t\,x + (1-t)\frac{x}{\|x\|} \qquad (*)$$

Questa è ben definita in quanto $t\,x + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$ è sempre $\neq 0$ per ogni $t \in [0,1]$. Infatti se fosse

$$t\,x = (t-1)\frac{x}{\|x\|}, \quad \text{passando alla norma otteniamo}$$

$$t\|x\| = (1-t) \quad \text{da cui, sostituendo in } t\,x + (1-t)\frac{x}{\|x\|} = 0,$$

si ottiene $t\,x + t\,x = 0$, cioè $t\,x = 0$

e poiché $x \neq 0$ questo porta ad una contraddizione.

Avendo mostrato che $(*)$ è ben definita, basta ora osservare che

$$F(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (i \circ r)(x)$$

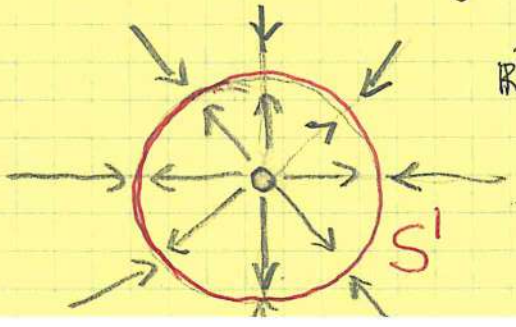
$$F(x, 1) = x = 1_{\mathbb{R}^2 - \{0\}}(x)$$

e, se $x \in S^1$, $F(x,t) = t\,x + (1-t)x = t\,x + x - t\,x = x$

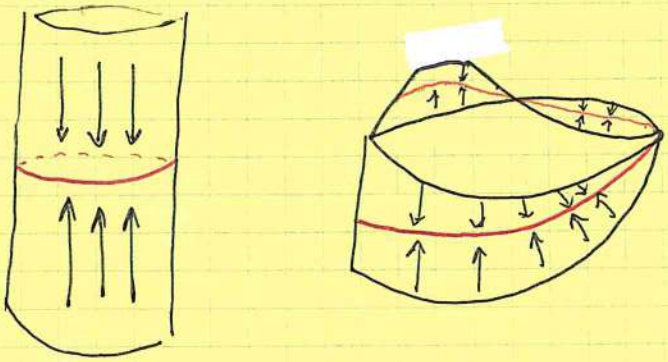
che non dipende da t.

Dunque $(*)$ fornisce effettivamente l'omotopia cercata.

Nota Esattamente la stessa dimostrazione fa vedere che $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ammette come retratto forte di deformazione la sfera S^n.



Esempio 3 Sia il cilindro che il nastro di Möbius ammettono S^1 come retratto di deformazione forte (intuitivamente, essi possono essere "schiacciati con continuità" sull'equatore mantenendo quest'ultimo fissato punto per punto)



Diamo l'espressione esplicita della retrazione per il cilindro $X = S^1 \times \mathbb{R}$ _

$$i : S^1_{\{0\}} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R} \qquad (z,0) \longrightarrow (z,0)$$

$$r : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \{0\} \qquad (z,x) \longrightarrow (z,0)$$

Ovviamente $r(z,0) = (z,0)$, cioè $r|_{S^1 \times \{0\}} = id$, e ciò mostra che r è una retrazione di $S^1 \times \mathbb{R}$ su $S^1 \times \{0\}$.

Mostriamo ora che $S^1 \times \{0\}$ è un retratto forte per deformazione di $S^1 \times \mathbb{R}$, ossia che

$$i \circ r \simeq_{S^1 \times \{0\}} 1_{S^1 \times \mathbb{R}}$$

Consideriamo

$$F : (S^1 \times \mathbb{R}) \times I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$
$$F((z,x),t) = (z, tx)$$

Si ha

$$F((z,x),0) = (z,0) = (i \circ r)(z,x)$$
$$F((z,x),1) = (z,x) = id(z,x)$$

$\forall (z,x) \in S^1 \times \mathbb{R}$

questo ha verificato che $i \circ r \simeq 1$, cioè che $S^1 \times \{0\}$ è un retratto per def. di $S^1 \times \mathbb{R}$

Inoltre, se $(z,0) \in S^1 \times \{0\}$ abbiamo:

$$F((z,0),t) = (z, t \cdot 0) = (z,0)$$

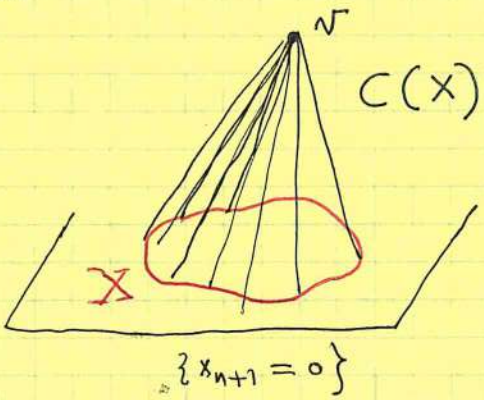
quindi è retratto di un retratto per deformazione forte.

Esempio 4 (Coni)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^{n+1}$, contenuto nel sottospazio $\{x_{n+1} = 0\}$. Sia $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e consideriamo il sottoinsieme

$$C(X) := \{ sv + (1-s)x \mid \underset{0 \le s \le 1}{x \in X} \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$C(X)$ è costituito per definizione da tutti i segmenti congiungenti v ad un punto di X, ed è detto il <u>cono</u> di vertice v e base X.



Affermo che $C(X)$ ammette il suo vertice v come retratto di deformazione forte. In particolare, <u>ogni cono è contraibile</u> (intuitivamente, $C(X)$ si può "risucchiare con continuità" nel vertice, mantenendo il vertice fissato durante la deformazione). Esplicitamente, data la forma del cono, possiamo scegliere un'omotopia lineare

$$F : C(X) \times I \longrightarrow C(X)$$
$$F(p,t) = tv + (1-t)p$$

(Esplicitamente, se $p = sv + (1-s)x$, con $x \in X$ e $0 \le s \le 1$, si ha

$$F(p,t) = (1 - t(1-s))v + t(1-s)x)$$

Mostriamo che F è un'omotopia fra $1_{C(X)}$ e c_v relativa

a r. Infatti

$$F(p,0) = p$$
$$F(p,1) = r \qquad \forall\, p \in C(X).$$

Inoltre $F(r,t) = tr + (1-t)r = r \qquad \forall\, t \in I$

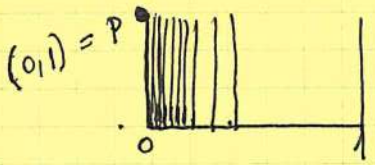
Esempio 5 (Un retratto di deformazione che non è un retratto forte di deformazione.)

Si dimostra che il "comb space"

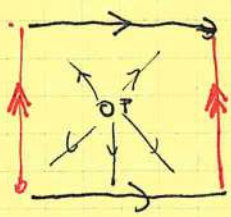
$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\tfrac{1}{n}\right\} \times [0,1] \right) \cup \left([0,1] \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times [0,1] \right)$$

ammette il punto $p = (0,1)$ come retratto di deformazione, ma non come retratto forte di deformazione.

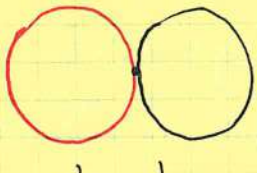
(vedi MSE questione 1143583)



Esempio 6 Sia $X = T^2 - \{p\}$ un "toro bucato". Allora è facile vedere che X ammette come retratto forte di deformazione $S^1 \vee S^1$, cioè un bouquet di due circonferenze (= due circonferenze che si toccano in un solo punto). A sua volta, $S^1 \vee S^1$ è omeomorfo ad una curva a forma di otto,

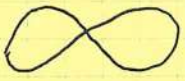


si retrae sul bordo

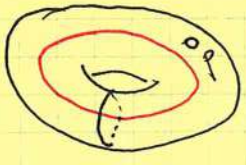


$S^1 \vee S^1$

omeomorfo a



$T^2 - \{p\}$
come spazio di identificazione



Omotopia di Cammini.

Ricordiamo il seguente semplice, ma utile,

Lemma d'incollamento.

Sia $Y = A \cup B$, dove A e B sono chiusi in Y.
Supponiamo che $f: A \to X$ e $g: B \to X$ siano continue.
Se $f(y) = g(y)$ per ogni $y \in A \cap B$, allora f e g si incollano ad una funzione continua $h: Y \to X$ definita come segue:

$$h(y) := \begin{cases} f(y) & \text{per } y \in A \\ g(y) & \text{per } y \in B \end{cases}$$

Considerando ora il caso particolare in cui $Y = [0,1]$ e $A = \partial I = \{0,1\}$. Ricordiamo che una funzione continua

$$f : I \longrightarrow X$$

è detta un <u>cammino</u>. Quindi dei cammini

$$f, g : I \longrightarrow X$$

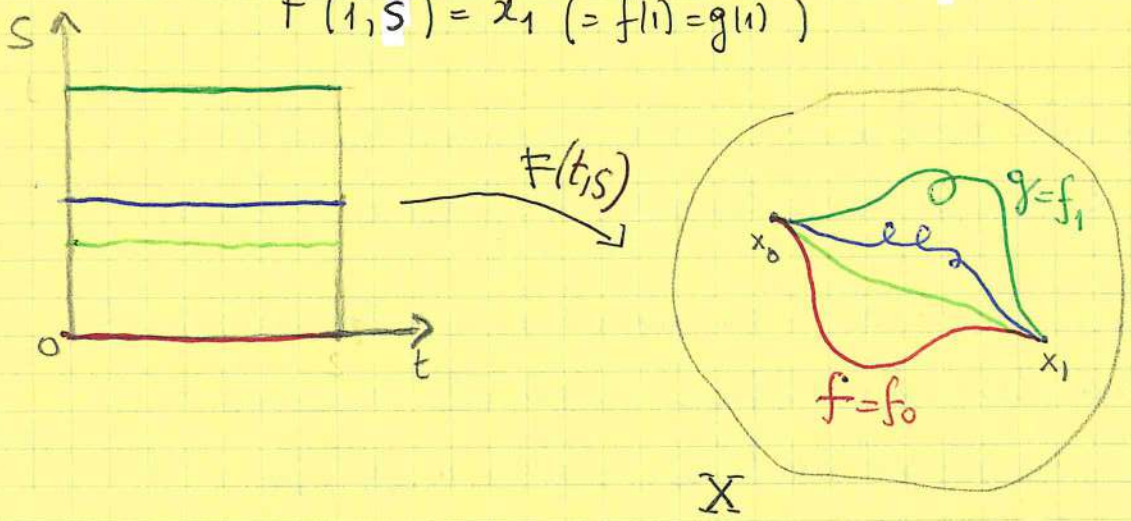
con punto iniziale x_0 e punto finale x_1

sono omotopi relativamente a ∂I (e scriveremo $f \simeq_{\partial I} g$) se esiste un'omotopia $F(t,s)$

Attenzione
Ora chiamo s il parametro di deformazione

$$F : I \times I \longrightarrow X \quad \text{tale che}$$

$$F(t,0) = f(t) \qquad \forall\, t \in I$$
$$F(t,1) = g(t)$$
$$F(0,s) = x_0 \ (= f(0) = g(0)) \qquad \forall\, s \in I.$$
$$F(1,s) = x_1 \ (= f(1) = g(1))$$



Osserviamo che le ultime due condizioni affermano semplicemente che ogni cammino

$$f_s : I \longrightarrow X \qquad f_s(t) = F(t,s)$$

è tale che $f_s(0) = x_0$, $f_s(1) = x_1$, cioè che f_s è a sua volta un cammino da x_0 a x_1, per ogni $s \in I$

Notazione D'ora in poi scriveremo $f \sim g$ invece di $f \simeq_{\partial I} g$, e diremo che f e g sono *equivalenti*

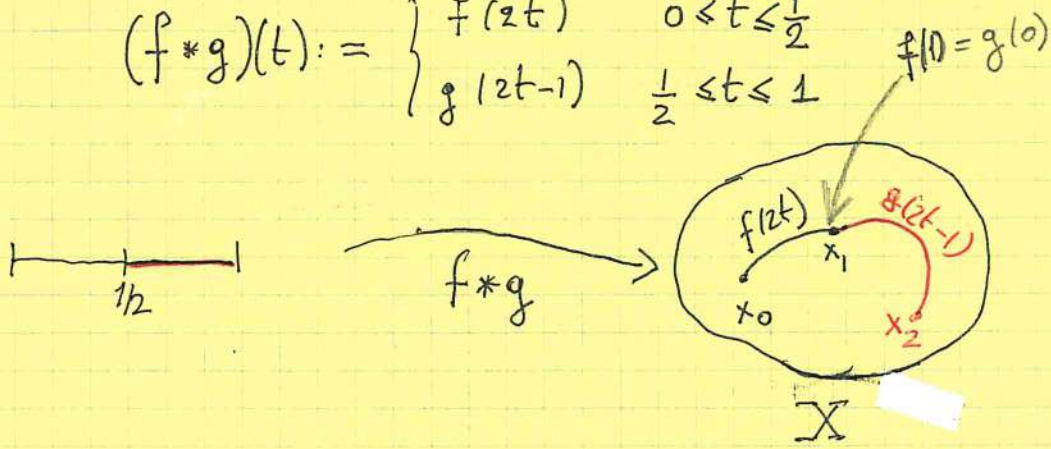
Concatenazione di Cammini

Siano $f, g : I \longrightarrow X$ due cammini tali che

$$f(1) = g(0)$$

Allora è possibile definire il prodotto (o concatenazione) di f e g come segue

$$(f * g)(t) := \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$



che risulta essere a sua volta un cammino continuo per il lemma di incollamento delle funzioni continue.

Se $f : I \longrightarrow X$ è un cammino, indicheremo con $[f]$ la sua classe d'equivalenza rispetto alla relazione $\sim$ (cioè, rispetto all'omotopia relativa a $\{0,1\}$).

Lemma Siano f_0, f_1, g_0, g_1 archi in X tali che

$$f_0(1) = g_0(0) \quad \text{e} \quad f_1(1) = g_1(0)$$

Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora

$$f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$$

Dim Siano $F : I \times I \longrightarrow X$ omotopia relativa a $\{0,1\}$ fra f_0 e f_1

$G : I \times I \longrightarrow X$ omotopia relativa a $\{0,1\}$ fra g_0 e g_1.

Definiamo quindi

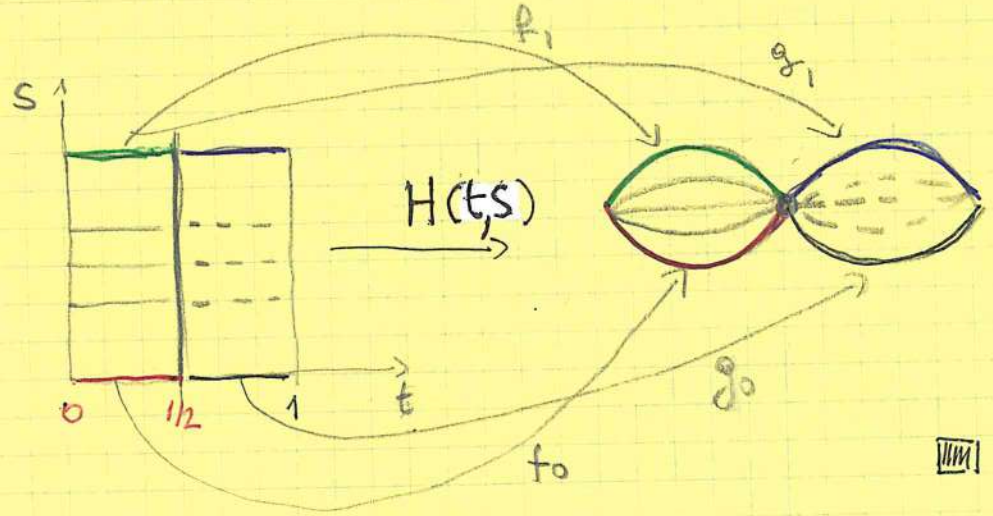
$$H : I \times I \longrightarrow X \qquad \text{come}$$

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1, s) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Per $t = \frac{1}{2}$ abbiamo, $\forall s \in I$:

$$F(2\tfrac{1}{2}, s) = F(1,s) = f(1) = g(0) = G(0,s) = G(2\cdot\tfrac{1}{2} - 1, s)$$

quindi H risulta continua per il Lemma d'Incollamento.
Si vede quindi facilmente che H è un'omotopia fra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$



∎

Corollario

È possibile definire un prodotto fra classi d'omotopia (rel $\{0,1\}$) che assume come segue:

$$[f] * [g] := [f * g]$$

per ogni coppia $f, g : I \longrightarrow X$ con $f(1) = g(0)$

Dim

L'operazione scritta è ben definita, infatti se $f \sim f'$ e $g \sim g'$ per il lemma precedente segue $f * g \sim f' * g'$, quindi

$$[f] * [g] = [f'] * [g']$$

∎

E' questa moltiplicazione di classi d'equivalenza di cammini che ci interessa in modo essenziale. Il motivo di lavorare sulle classi, invece che direttamente sui cammini, è che in generale la moltiplicazione di cammini è non associativa, come mostrato dal seguente

Esempio

Siano $f, g, h : I \longrightarrow X$ tre archi tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Allora

$$((f*g)*h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases},$$

$$(f*(g*h))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le 3/4 \\ h(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Tuttavia, e questa è la cosa importante, si ha

$$([f]*[g])*[h] = [f]*([g]*[h])$$

ovvero il prodotto sull'insieme delle classi d'equivalenza è associativo. Più precisamente, vale il seguente risultato:

Proposizione

(1) Siano f, g, h tre cammini come sopra. Allora

$$(f*g)*h \sim f*(g*h) \qquad ([f]*[g])*[h] = [f]*([g]*[h])$$

(2) Sia $f : I \longrightarrow X$ un cammino con

$$f(0) = x_0 \quad \text{e} \quad f(1) = x_1.$$

Allora

$$\varepsilon_{x_0} * f \sim f * \varepsilon_{x_1} \sim f \qquad [\varepsilon_{x_0}]*[f] = [f]*[\varepsilon_{x_1}] = [f]$$

(3) Sia f come sopra, e poniamo $\bar{f}(t) := f(1-t)$

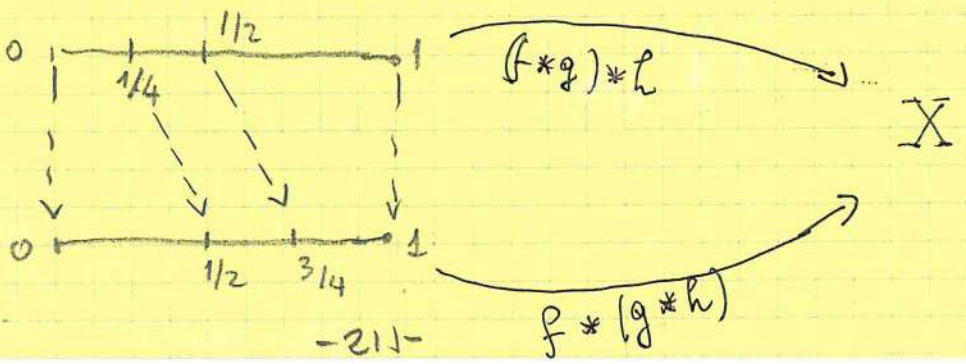
Allora $\bar{f}(0) = x_1$, $\bar{f}(1) = x_0$ e si ha

$$f * \bar{f} \sim \varepsilon_{x_0}, \quad \bar{f} * f \sim \varepsilon_{x_1} \qquad [\bar{f}]*[f] = [f]*[\bar{f}] = [\varepsilon_{x_1}]$$

Dim. Scriviamo esplicitamente in ogni caso l'omotopia cercata, che si ottiene mediante l'uso di opportune funzioni lineari.

(1) Un'omotopia esplicita fra $(f*g)*h$ e $f*(g*h)$ può essere data come segue:

$$F(t,s) = \begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & 0 \le t \le \dfrac{s+1}{4} \\ g(4t-1-s) & \dfrac{s+1}{4} \le t \le \dfrac{s+2}{4} \\ h\left(1 - \dfrac{4(1-t)}{2-s}\right) & \dfrac{s+2}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$



(2) Dimostriamo che $\varepsilon_{x_0} * f \sim f$, l'altra equivalenza è simile ed è lasciata per esercizio.

Notiamo che

$$(\varepsilon_{x_0} * f)(t) = \begin{cases} x_0 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

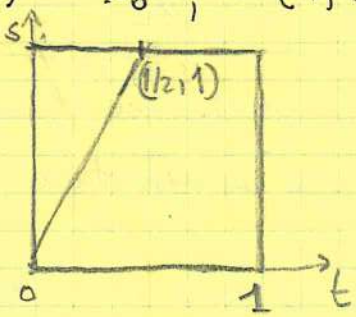
Allora basta prendere

$$F(t,s) = \begin{cases} x_0 & 0 \le t \le \frac{1}{2}s \\ f\left(\frac{2t-s}{2-s}\right) & \frac{1}{2}s \le t \le 1 \end{cases}$$

Infatti si ha:

$$F(t,0) = f(t), \quad F(t,1) = \varepsilon_{x_0} * f$$

$$F(0,s) = x_0, \quad F(1,s) = x_1 \qquad \forall s \in I$$

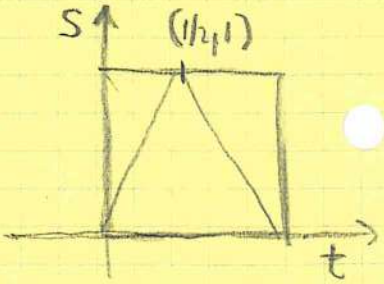


(3) Mostriamo $f * \bar{f} \sim \varepsilon_{x_0}$, l'altra equivalenza è simile ed è lasciata per esercizio. Abbiamo

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \bar{f}(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Allora definiamo

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2\, s \\ f(s) & \frac{1}{2}s \le t \le 1 - \frac{1}{2}s \\ f(2-2t) & 1 - \frac{1}{2}s \le t \le 1 \end{cases}$$



Si ha $F(t,0) = \begin{cases} f(0) & t=0 \\ f(0) & 0 \le t \le 1 \\ f(0) & 1 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow F(t,0) = \varepsilon_{x_0}$

$$F(t,1) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ f(1) & t = 1/2 \\ f(2-2t) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow F(t,1) = f * \overline{f}$$

$F(0,s) = f(0) = x_0 \qquad \forall s \in I.$
$F(1,s) = f(0) = x_0$

Questo conclude la dimostrazione ∎

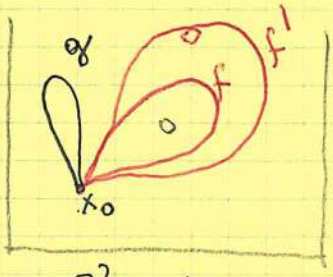
Possiamo riassumere i risultati della Proposizione precedente, affermando che l'insieme di tutte le classi di equivalenza di cammini $f: I \longrightarrow X$ soddisfa gli assiomi di gruppo, eccetto per il fatto che la composizione $[f] * [g]$ è definita solo quando $f(1) = g(0)$.
Per ovviare a questo inconveniente, considereremo solo classi di cammini <u>chiusi</u>, ovvero tali che $f(0) = f(1)$. Tali cammini vengono detti <u>lacci</u> ("loops", in inglese). Indichiamo con $\Omega(X, x_0)$ l'insieme dei lacci $f: I \to X$ tali che $f(0) = f(1) = x_0$. Per quanto appena visto, abbiamo il seguente

<u>Teorema</u> L'insieme $\Omega(X, x_0)/\sim$ delle classi di omotopia di lacci con origine e fine $x_0 \in X$ forma un gruppo con l'operazione $*$. Tale gruppo è detto primo gruppo di omotopia di X, o gruppo fondamentale di X, ed indicato con

$$\pi_1(X, x_0)$$

Gli elementi di $\pi_1(X, x_0)$ sono dunque classi d'equivalenza omotopica di lacci basati in x_0, e l'operazione di composizione è $[f] * [g] = [f * g]$ (ora la composizione è sempre definita)

L'elemento neutro è $[\varepsilon_{x_0}]$, cioè la classe del laccio costante, e l'inverso di $[f]$ è $[\bar{f}]$, dove $\bar{f}(t) = f(1-t)$

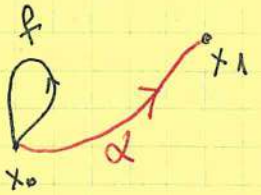


$\mathbb{R}^2 - \{0\}$

Es Come elemento del gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ si ha $[f] = [f'] \neq [\varepsilon_{x_0}]$, mentre $[g] = [\varepsilon_{x_0}]$, cioè g è omotopo al laccio costante posto in x_0.

Il punto x_0 viene detto <u>punto base</u> del gruppo fondamentale. Che succede quando si cambia punto base? Supponiamo che X sia connesso per archi, e siano x_0, x_1 due punti distinti di X. Sia poi $\alpha : I \to X$ un arco che congiunge x_0 a x_1. Resta dunque definita un'applicazione

$$\Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_1)$$
$$f \longrightarrow \bar{\alpha} * f * \alpha$$



dove $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ è l'arco opposto di α.

Se $f \sim f'$ allora $\bar{\alpha} * f * \alpha \sim \bar{\alpha} * f' * \alpha$, per cui resta definita un'applicazione fra i gruppi fondamentali

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{data da}$$
$$\phi([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$$

<u>Teorema</u>

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dim Mostriamo innanzitutto che ϕ è un omomorfismo di gruppi.
Si ha

$$\phi([f]*[g]) = [\bar{\alpha}]*[f]*[g][\alpha]$$
$$= [\bar{\alpha}]*[f]*\underbrace{[\alpha]*[\bar{\alpha}]}_{[\varepsilon_{x_0}]}*[g]*[\alpha]$$
$$= ([\bar{\alpha}]*[f]*[\alpha])*([\bar{\alpha}]*[g]*[\alpha])$$
$$= \phi([f])*\phi([g])$$

Il fatto che ϕ sia un isomorfismo segue immediatamente dal fatto che ϕ ammette un omomorfismo inverso, dato da

$$\phi^{-1}: \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$
$$[g] \longrightarrow [\alpha]*[g]*[\bar{\alpha}]$$

∎

Notazione la classe di isomorfismo di

- L'ultimo risultato mostra che, se X è connesso per archi, allora $\pi_1(X, x_0)$ non dipende dal punto base $x_0 \in X$. Dunque a volte scriveremo semplicemente $\pi_1(X)$ invece di $\pi_1(X, x_0)$
- Indicheremo il prodotto $[f]*[g]$ in $\pi_1(X, x_0)$ semplicemente con $[f][g]$
- L'elemento neutro sarà indicato con $[1]$
- L'inverso $[\bar{f}]$ di $[f]$ sarà indicato con $[f]^{-1}$

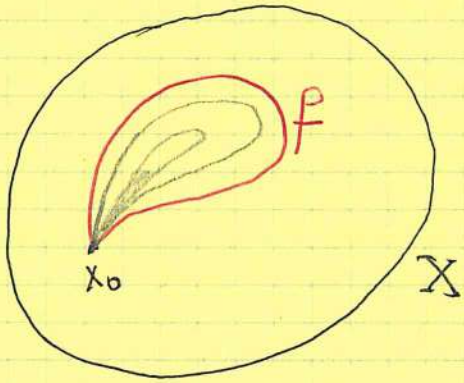
Il problema che ~~esplicitamente~~ sorge è quello di calcolare esplicitamente il gruppo fondamentale di uno spazio topologico. Questo è in generale un problema difficile, che saremo in grado di risolvere solo in un numero finito di casi. Il primo, molto semplice, è dato dalla seguente

Proposizione Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso. Allora
$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

Dim Sappiamo già che se X è convesso allora due qualsiasi mappe $f, g : I \to X$ sono omotope tra loro per mezzo di un'omotopia lineare. In particolare, dato $f : I \to X$ laccio con punto base x_0, posso trovare un'omotopia (relativa a $\{0,1\}$) col laccio costante ε_{x_0} come segue:

$$F : I \times I \longrightarrow X$$
$$F(t,s) = (1-s) f(t) + s\, \varepsilon_{x_0}$$

Dunque $[f] = [\varepsilon_{x_0}]$ per ogni $f \in \Omega(X, x_0)$, cioè ogni laccio in X è omotopicamente banale ∎



Def Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se
$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

Il risultato precedente può allora essere espresso dicendo che

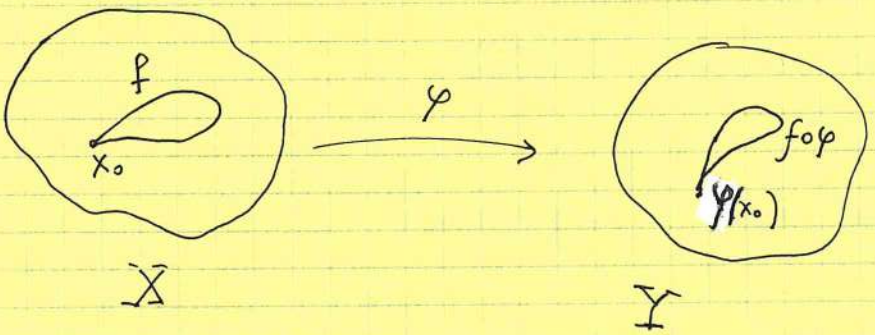
[Ogni sottospazio convesso $X \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.]

Effetto di una trasformazione continua sul gruppo fondamentale.

Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione continua, e siano $f_0, f_1 : I \to X$ ~~connessi~~ lacci continui con punto base x_0. Se f_0, f_1 sono equivalenti, è facile vedere che $\varphi \circ f_0$ e $\varphi \circ f_1$ sono lacci equivalenti in Y, con punto base $\varphi(x_0)$. Quindi resta ben definita un'applicazione

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$
$$\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$$

[**Proposizione**
φ_* è un omomorfismo di gruppi.]



Dim

Siano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Allora si ha

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([f * g]) = [\varphi \circ [f * g)]$$
$$= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g]$$
$$= \varphi_*[f]\ \varphi_*[g]$$

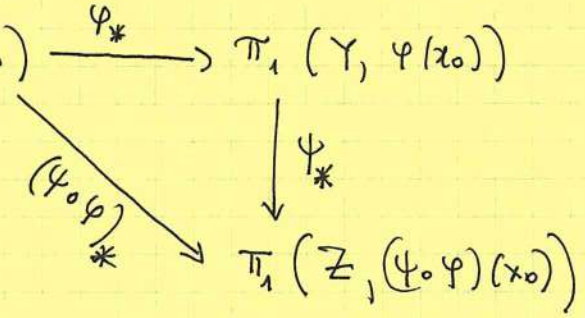
∎

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

è detto l'omomorfismo indotto da $\varphi : X \to Y$ sui gruppi fondamentali. Siccome ogni omomorfismo di gruppi manda il neutro nel neutro, segue che in particolare $\varphi_*[\varepsilon_{x_0}] = [\varepsilon_{\varphi(x_0)}]$.

Esercizio Dimostrare quanto segue.

(1) Se $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$



In altre parole il diagramma a sinistra è commutativo.

(2) Se $1_X : X \to X$ è l'applicazione identica, allora

$$(1_X)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

è l'omomorfismo identico.

Dall'esercizio segue l'importante

Corollario

Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo, allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

è un isomorfismo. Dunque spazi omeomorfi hanno gruppi fondamentali isomorfi.

Attenzione: il viceversa non vale. Infatti vi sono spazi topologici non omeomorfi che hanno gruppo fondamentale isomorfo (ad esempio, un punto ed $\mathbb{R}$).

Inoltre, se $\varphi: X \to Y$ è iniettiva [suriettiva] NON è detto che $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ sia iniettiva [suriettiva]. Vedremo esempi di questa situazione dopo.

Il seguente risultato mostra che applicazioni omotope (rispetto a $\{x_0\}$) inducono lo stesso omomorfismo fra gruppi fondamentali.

Teorema. (in particolare $\varphi_0(x_0) = \varphi_1(x_0)$)

Siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ applicazioni omotope rispetto a $\{x_0\}$. Allora

$$(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi_0(x_0))$$

Dim

Siccome $\varphi_0 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_1$, si ha che per ogni laccio $f: I \to X$ con punto base x_0 vale $\varphi_0 \circ f \simeq_{\varphi(x_0)} \varphi_1 \circ f$, cioè $\varphi_0 \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ sono lacci equivalenti in Y, con punto base $\varphi_0(x_0)$. Ma allora, $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$:

$$(\varphi_0)_*[f] = [\varphi_0 \circ f] = [\varphi_1 \circ f] = (\varphi_1)_*[f].$$

Corollario Sia $\varphi : X \to Y$ un'equivalenza omotopica con inversa ψ, e supponiamo che $(\varphi \circ \psi)(x_0) = (\psi \circ \varphi)(x_0) = x_0$. Allora

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, \varphi(x_0))$$

è un isomorfismo.

~~Dim~~ Abbiamo, per definizione,

$\varphi \circ \psi \simeq$

Corollario Sia $r : X \to A$ una retrazione forte per deformazione dello spazio topologico X nel suo sottospazio $A \subseteq X$. Allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo dei gruppi fondamentali

$$i_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$

per ogni $a \in A$.

Dim Per definizione di retratto forte di deformazione si ha

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \qquad X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i} X$$

$$r \circ i = 1_A \qquad i \circ r \simeq_A 1_X$$

Allora si ha $(r \circ i)_* = (1_A)_*$ e, per il Teorema precedente, $(i \circ r)_* = (1_X)_*$. Tuttavia, siccome $(1_A)_*$ e $(1_X)_*$ sono gli omomorfismi identici, si hanno due diagrammi commutativi come segue:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A,a) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X,a) \\ & \searrow^{id} & \downarrow r_* \\ & & \pi_1(A,a) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(X,a) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(A,a) \\ & \searrow^{id} & \downarrow i_* \\ & & \pi_1(X,a) \end{array}$$

Ciò mostra che i_* e r_* sono isomorfismi di gruppi, uno inverso dell'altro ∎

Come importante conseguenza, abbiamo il seguente

Corollario 2

Se X è uno spazio topologico contraibile fortemente ad un punto, allora X è semplicemente connesso (il suo gruppo fondamentale è banale)

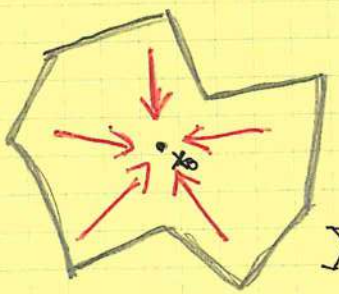
Dim

Se $r: X \longrightarrow \{x_0\}$ è una retrazione forte (per deformazione) ad un punto, allora il Corollario 1 ci dice che, se $i: \{x_0\} \hookrightarrow X$ è l'inclusione,

$$i_*: \pi_1(\{x_0\}, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ è un isomorfismo.}$$

Ma $\{x_0\}$ è lo spazio formato da un solo punto, quindi $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}$ e la dimostrazione è conclusa ∎

Casi particolari: Convessi di $\mathbb{R}^n$, Stellati di $\mathbb{R}^n$, sono spazi topologici semplicemente connessi ∎



$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

Ora dimostriamo un risultato concernente il gruppo fondamentale di un prodotto.

Teorema Siano X, Y spazi topologici (Connessi per archi).
Allora, $\forall (x_0, y_0) \in X \times Y$ si ha

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Dim Siano $p: X \times Y \to X$, $q: X \times Y \to Y$ le due proiezioni naturali, che inducono i due omomorfismi di gruppi

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$$

$$q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Allora possiamo definire un omomorfismo prodotto:

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$
$$\Phi([f]) := (p_*[f], q_*[f])$$

Mostriamo che Φ è un isomorfismo.

Φ è suriettiva:

Sia $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$
Allora si ha $([f_1], [f_2]) = \Phi_*[f]$, dove

$$f: I \longrightarrow X \times Y \text{ è tale che}$$
$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

$f(0)=f(1)$
$=g(0)=g(1)$
$=(x_0,y_0)$.

Φ è iniettiva Supponiamo $\Phi([f])=\Phi([g])$

Allora, per definizione,

$$(p_*[f],\, q_*[f]) = (p_*[g],\, q_*[g]),\ \text{cioè}$$

$p_*[f]=p_*[g]$ in $\pi_1(X,x_0) \Rightarrow p\circ f \sim p\circ g$ in X.

$q_*[f]=q_*[g]$ in $\pi_1(Y,y_0) \Rightarrow q\circ f \sim q\circ g$ in Y.

Esistono dunque due omotopie relative a $\{0,1\}$:

$$F_1 : I\times I \longrightarrow X$$

$$F_1(t,0)=(p\circ f)(t),\quad F_1(t,1)=(p\circ g)(t) \qquad \forall\, t\in I$$

$$F_1(0,s)=F_1(1,s)=(p\circ f)(0)=x_0 \qquad \forall\, s\in I$$

$$F_2 : I\times I \longrightarrow Y$$

$$F_2(t,0)=(q\circ f)(t),\quad F_2(t,1)=(q\circ g)(t) \qquad \forall\, t\in I$$

$$F_2(0,s)=F_2(1,s)=(q\circ f)(0)=y_0. \qquad \forall\, s\in I.$$

Definiamo ora

$$F : I\times I \longrightarrow X\times Y \qquad \text{come}$$

$$F(t,s)=(F_1(t,s),\, F_2(t,s))$$

Allora

$$F(t,0)=(F_1(t,0),\, F_2(t,0))$$
$$=((p\circ f)(t),\,(q\circ f)(t))=f(t) \qquad \forall\, t\in I$$

$$F(t,1)=(F_1(t,1),\, F_2(t,1))$$
$$=((p\circ g)(t),\,(q\circ g)(t))=g(t)$$

$$F(0,s)=(F_1(0,s),\,F_2(0,s))=(x_0,y_0) \qquad \forall\, s\in I.$$
$$F(1,s)=(F_1(1,s),\,F_2(1,s))=(x_0,y_0)$$

Ciò mostra che F è un'omotopia fra f e g relativa a $\{0,1\}$, cioè $f\sim g$ in $X\times Y$, dunque $[f]=[g]$ in $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$. ∎

(30)

Corollario

Se X e Y sono spazi topologici semplicemente connessi, anche $X \times Y$ è semplicemente connesso.

Dim Per ipotesi

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(Y, y_0) = \{1\}, \text{ dunque}$$

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) = \{1\} \quad \blacksquare$$

Il gruppo fondamentale della circonferenza

Sia $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Il nostro scopo è dimostrare che il gruppo fondamentale di S^1 è ciclico infinito, cioè che

$$\boxed{\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}} \qquad (1 \in \mathbb{C})$$

La spiegazione intuitiva è la seguente: ogni arco chiuso $f : I \to S^1$, $f(0) = f(1) = 1$, "gira" un certo numero di volte sulla circonferenza. Più precisamente, diamo un valore di $+1$ ogni volta che compiamo un giro completo in senso antiorario e un valore di -1 ogni volta che compiamo un giro completo in senso orario. Il "punteggio totale" ottenuto è un numero intero che è detto "indice di avvolgimento" ("winding number" in inglese). Ad esempio

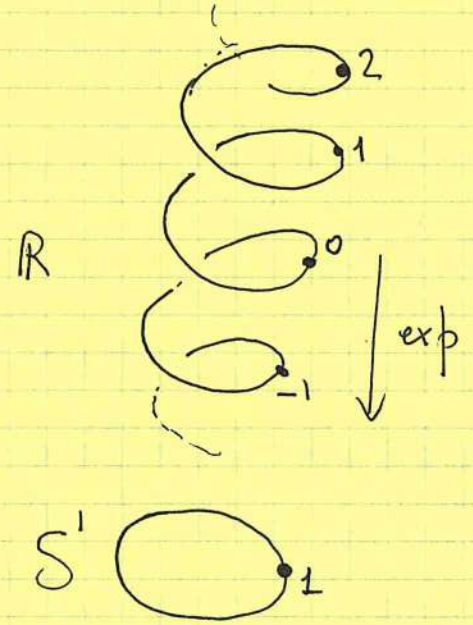
2 giri antiorari	+ 2 giri orari	winding number	$= 0$
3 " "	+ 4 " "	" "	$= -1$
3 " "	+ 2 " "	" "	$= 1$

Si dimostra che due archi sono equivalenti se e solo se i loro gradi coincidono e che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ fissato esiste un arco chiuso di grado n.

Per ottenere una definizione rigorosa del grado di un arco chiuso, correleremo l'applicazione esponenziale di $\mathbb{R}$ sulla circonferenza S^1:

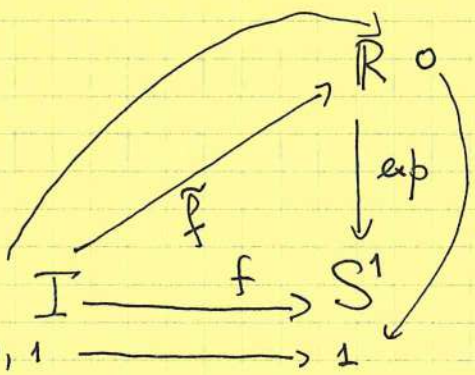
$$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$\exp(x) = e^{2\pi i x} \quad (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \in \mathbb{R}^2$$

La funzione exp è continua e suriettiva, inoltre
$\exp(0) = 1$ e inoltre $\exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
Sappiamo già che exp si può rappresentare come la proiezione di un'elica (omeomorfa ad $\mathbb{R}$) su S^1:



Per dimostrare che $\pi_1(S^1, 1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$, procederemo nel modo seguente:

Passo 1 Dimostreremo che, dato un qualunque laccio $f: I \to S^1$ con $f(0) = f(1) = 1$, esiste uno e un solo arco $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(0) = 0$ e $\exp \circ \tilde{f} = f$. Tale arco è detto il sollevamento di f ad $\mathbb{R}$ con punto iniziale 0.



$$\begin{cases} \exp \circ \tilde{f} = f \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

Passo 2 Poiché $f(1) = 1$, si ha $\exp(\tilde{f}(1)) = f(1) = 1$ da cui $\tilde{f}(1) \in \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, cioè $\tilde{f}(1)$ (il punto finale del nostro sollevamento) è un numero intero che chiameremo "grado", o "numero di avvolgimento" di $f : I \to S^1$.

Passo 3 Faremo vedere che se $f_0, f_1 : I \to S^1$ sono due archi equivalenti allora $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$, cioè essi hanno lo stesso grado. Dunque la funzione grado

$G : \Omega(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ induce una funzione grado

$G : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$G([f]) = \tilde{f}(1)$ dove $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è l'unico sollevamento di $f : I \to S^1$ tale che $\tilde{f}(0) = 0$. □

Passo 4 Dimostreremo infine che

$G : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$

è un isomorfismo di gruppi.

Oss Questo metodo di dimostrazione si generalizza a mappe aventi comportamento simile a quello di $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, i cosiddetti rivestimenti (vedi ad esempio [Kosniowski, Cap. 17] o [Manetti, Cap. 12])

Cominciamo quindi con la nostra dimostrazione.

(341)

Passo 1 — Sollevamento di cammini

Cominciamo con il seguente

Lemma (Esistenza del numero di Lebesgue)
Sia X uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X.
Allora esiste un numero reale $\delta = \delta(\mathcal{A})$, chiamato il numero di Lebesgue del ricoprimento $\mathcal{A}$, tale che ogni sottoinsieme di X di diametro $< \delta$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{A}$

Nota Il diametro di un sottoinsieme $Z \subseteq Y$ è definito come $\operatorname{diam}(Z) = \sup \{ d(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in Z \}$

Dimostrazione [Armstrong, lemma 3.11 p. 49]
Se il lemma fosse falso, potremmo trovare una successione

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

di sottoinsiemi di X tale che

1) A_n non è contenuto in nessun ~~sottoinsieme~~ membro di $\mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
2) $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow[n]{} 0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si scelga un punto $x_n \in A_n$, e si consideri la successione $\{x_n\} \subset X$ - poiché X è uno spazio metrico ~~compatto~~, compattezza e compattezza per successioni coincidono, quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ tale che

$$x_{n_k} \xrightarrow[k]{} p \in X.$$

Sia ora $\mathcal{U}$ un elemento di $\mathcal{A}$ che contiene p, e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $B(p, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Siccome

$$\operatorname{diam}(A_n) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad x_{n_k} \xrightarrow[k]{} p,$$

possiamo scegliere $N \in \mathbb{N}$ abbastanza grande tale che entrambe le seguenti condizioni siano soddisfatte:

(1) $\operatorname{diam}(A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$

(2) $d(x_N, p) < \varepsilon/2$

Per definizione, (1) implica $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $x, y \in A_N$; in particolare, preso $y = x_N$, otengo $d(x, x_N) < \varepsilon/2$ per ogni $x \in A_N$.

Allora, usando anche (2), otteniamo

$$d(x, p) \leq d(x, x_N) + d(x_N, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall x \in A_N,$$

cioè $\big(x \in A_N \Rightarrow x \in B(p, \varepsilon)\big)$. Ma allora

$$A_N \subseteq B(p, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U},$$

contraddicendo la nostra scelta iniziale della successione $\{A_1, A_2, \dots\}$. ∎

Definizione Consideriamo l'applicazione esponenziale

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad \exp(x) = e^{2\pi i x}$$

Diremo che un aperto connesso $\mathcal{U}$ di S^1 è "uniformemente rivestito" da exp se esiste un aperto $V \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$\exp^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (V + n),$$

dove $V + n = \{v + n \mid v \in V\}$, in modo tale che ciascuno degli aperti $V + n$ sia omeomorfo a $\mathcal{U}$ tramite l'applicazione restrizione

$$\exp : V + n \longrightarrow \mathcal{U}.$$

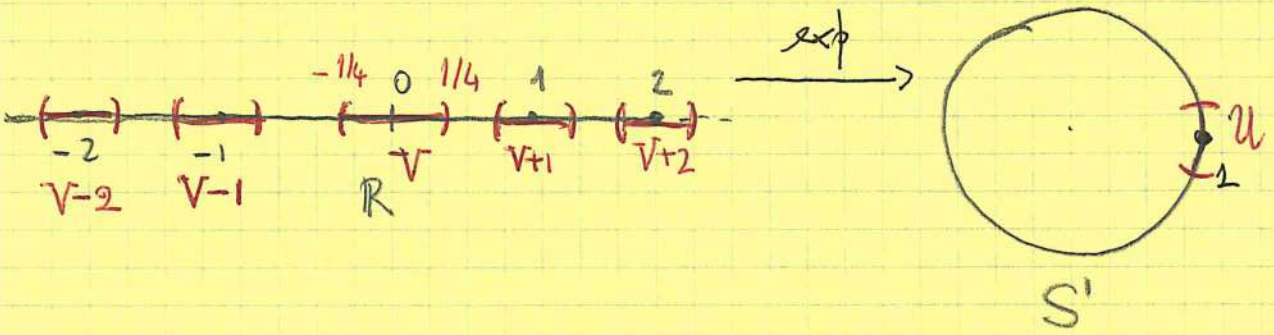
---

[361]

Proposizione

Ogni punto $z \in S^1$ è contenuto in un aperto U uniformemente rivestito da $\exp : \mathbb{R} \to S^1$

Dim La facciamo per il punto $z = 1$. La dimostrazione nel caso generale è analoga ed è lasciata per esercizio.



Si prenda $V = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \subset \mathbb{R}$ e sia $U = \exp(V)$.

Allora

$$\exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (V+n)$$

e chiaramente $\exp : V+n \to U$ è un omeomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$ ∎

Corollario

S^1 possiede un ricoprimento aperto finito formato da aperti uniformemente rivestiti da $\exp : \mathbb{R} \to S^1$

La proprietà dell'esistenza di aperti uniformemente rivestiti garantisce molte proprietà quando da $\exp$ inizia come "rivestimento"!

Dim Per ogni $z \in S^1$, sia U_z un aperto di S^1 contenente z e uniformemente rivestito da $\exp$ (esso esiste per la proposizione precedente). Allora

$\{U_z\}_{z \in S^1}$ è un ricoprimento aperto di S^1, da cui posso estrarre un sottoricoprimento finito per ~~[illegible]~~ compattezza di S^1 ∎

Ora possiamo dimostrare l'importante risultato che segue, noto come Teorema di Sollevamento dei Cammini.

Teorema (Sollevamento dei Cammini)
Consideriamo un cammino continuo $f: I \to S^1$ tale che $f(0) = z_0 \in S^1$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualsiasi elemento di $\exp^{-1}(z_0)$, cioè un qualsiasi punto tale che $\exp(x_0) = z_0$.
Allora esiste <u>unica</u> un'applicazione continua $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ che rende commutativo il seguente diagramma di spazi topologici puntati:

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}, x_0) \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow \exp \\ (I, 0) & \xrightarrow{f} & (S^1, z_0) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \exp \circ \tilde{f} = f \\ \tilde{f}(0) = x_0 \end{array}$$

$\tilde{f}$ è detto il <u>sollevamento di f</u> <u>con punto iniziale x_0</u>.

<u>Dimostrazione</u>
Si consideri un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U\}_{U \in \mathcal{U}}$ di S^1 formato da aperti uniformemente ricoperti da $\exp: \mathbb{R} \to S^1$. Allora, per il Lemma sull'esistenza del numero di Lebesgue, possiamo trovare una suddivisione di $[0,1]$ della forma

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

tale che, per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$, l'immagine $f([t_i, t_{i+1}])$ sia completamente contenuta in un aperto $U \in \mathcal{U}$.
Allora possiamo costruire il nostro sollevamento $\tilde{f}$ passo per passo come segue.
Innanzitutto, definiamo $\tilde{f}(0) = x_0$. Supponendo che $\tilde{f}(t)$ sia definita su $[0, t_i]$, definiamo $\tilde{f}$ su $[t_i, t_{i+1}]$

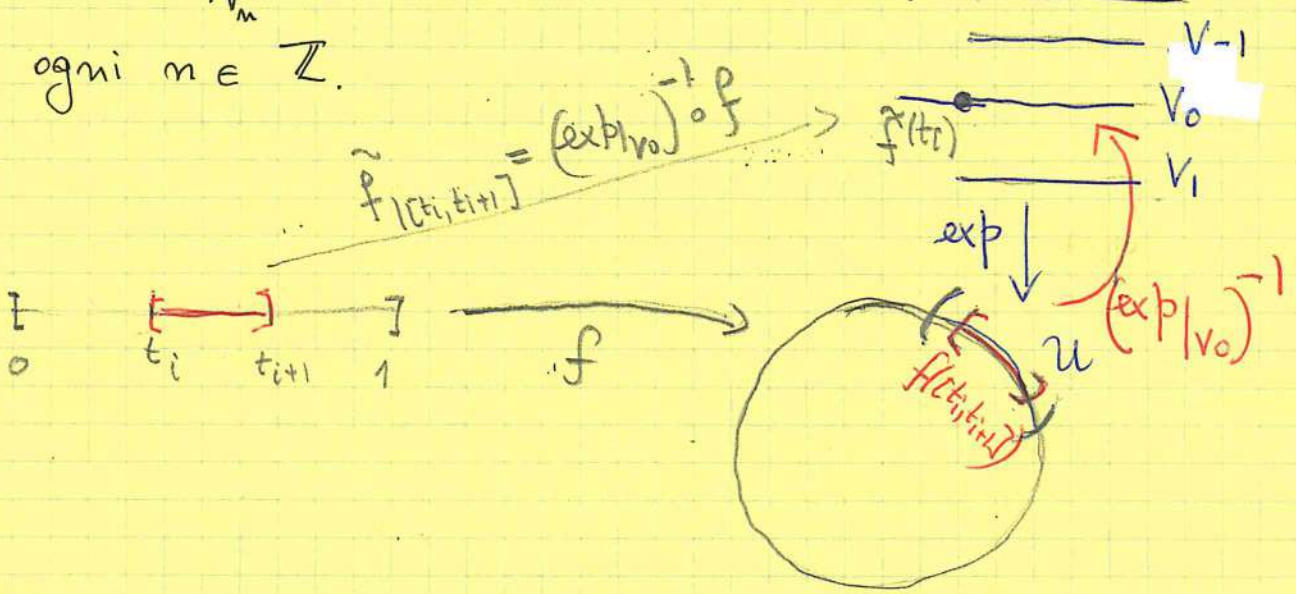
(50)

nel modo che andremo ad illustrare.

Per quanto detto, $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U$, dove U è un aperto uniformemente ricoperto da $\exp$, per cui posso scrivere

$$\exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$$

dove $\exp|_{V_n} : V_n \to U$ è un omeomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$.



~~Abbiamo già definito~~ Stiamo supponendo di aver già definito $\tilde{f}$ su $[0, t_i]$, in particolare $\tilde{f}(t_i) \in \exp^{-1}(U)$ è definita e pertanto appartiene ad uno dei V_n,

ad esempio (a meno di rinominarli) $\tilde{f}(t_i) \in V_0$.

Allora possiamo definire

$$\tilde{f}(t) = (\exp|_{V_0})^{-1}(f(t)) \quad \text{per ogni } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

ricordiamo che $\exp|_{V_0}$ è un omeomorfismo tra V_0 e U, dunque $(\exp|_{V_0})^{-1} : U \to V_0$ è anche un omeomorfismo

cioè $\tilde{f} = (\exp|_{V_0})^{-1} \circ f$ su $[t_i, t_{i+1}]$ e $\exp \circ \tilde{f} = \exp \circ \exp^{-1} \circ f = f$.

Siccome $(\exp|_{V_0})^{-1}$ è un omeomorfismo, in particolare una funzione continua, in tale modo si è ottenuta una funzione continua $\tilde{f}: [0, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ che solleva f, grazie al lemma di incollamento. In questo modo si estende $\tilde{f}$ su tutto $[0,1]$ passo per passo, la continuità segue sempre dal lemma di incollamento e il fatto che $\exp \circ \tilde{f} = f$ è immediato dalla definizione di $\tilde{f}$ come visto prima.

Rimane ora solo da dimostrare che il sollevamento così ottenuto è unico. Ciò viene ~~fatto~~ fatto passo per passo come nel procedimento di costruzione.

Supponiamo che $\tilde{\tilde{f}}$ sia un altro sollevamento di f ~~che~~ con punto iniziale x_0, cioè $\exp \circ \tilde{\tilde{f}} = f$ e $\tilde{\tilde{f}}(0) = x_0 = \tilde{f}(0)$.

Supponendo che $\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t)$ per ogni $0 \le t \le t_i$, mostriamo che $\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t)$ anche per $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Se V_0 è come prima, allora sappiamo che

$$\tilde{f} = (\exp|_{V_0})^{-1} \circ f \quad \text{su } [t_i, t_{i+1}].$$

Consideriamo ora $\tilde{\tilde{f}}$. Se $t \in [t_i, t_{i+1}]$, avremo

$$\exp(\tilde{\tilde{f}}(t)) = f(t) \in U, \quad \text{quindi}$$

$$\tilde{\tilde{f}}(t) \in \exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}],$$

in altre parole $\tilde{\tilde{f}}([t_i, t_{i+1}]) \in \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$.

Ma $\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ è un'unione disgiunta di aperti connessi di $\mathbb{R}$, e $[t_i, t_{i+1}]$ è connesso. Allora, necessariamente, $\tilde{\tilde{f}}([t_i, t_{i+1}])$ è interamente contenuto in uno solo dei V_n.

[40] Ma $f(t_i) = \tilde{f}(t_i) \in V_0$, pertanto $f([t_i, t_{i+1}]) \subset V_0$.
Allora, se $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\tilde{\tilde{f}}(t)$ deve essere uguale a qualche punto y di V_0 tale che $y \in \exp^{-1}(f(t))$.
Ma $V_0 \xrightarrow{\exp|_{V_0}} U$ è un omeomorfismo, dunque vi è un solo tale punto, cioè

$$y = \left(\exp|_{V_0}\right)^{-1}(f(t))$$

Pertanto

$$\tilde{\tilde{f}}(t) = \left(\exp|_{V_0}\right)^{-1}(f(t)) = \tilde{f}(t)$$

per ogni $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Procedendo ricorsivamente in tal modo si ottiene

$$\tilde{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t) \quad \text{per ogni } t \in [0,1]$$

(FONDAMENTALE) ∎

Esempio Consideriamo

$$f: I \longrightarrow S^1$$
$$f(t) = \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$$

Allora f è un cammino chiuso con $f(0) = f(1) = 1 \in S^1$ che "si avvolge una volta in senso antiorario".

Un sollevamento $\tilde{f}$ di f deve verificare

$$\exp(\tilde{f}(t)) = f(t) \qquad t \in [0,1],$$

cioè $\cos(2\pi \tilde{f}(t)) + i \operatorname{sen}(2\pi \tilde{f}(t)) = \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$

Ciò implica che $2\pi \tilde{f}(t) = 2\pi t + k(2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
in altre parole

[ogni sollevamento $\tilde{f}$ di f è della forma
$\tilde{f}_k: I \to \mathbb{R}$ $\quad \tilde{f}_k(t) = t + k$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$]

Notiamo che $\exp^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ e che

$\tilde{f}_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è precisamente l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = k \in \exp^{-1}(1)$.

In particolare, il sollevamento con $\tilde{f}(0) = 0$ è dato da

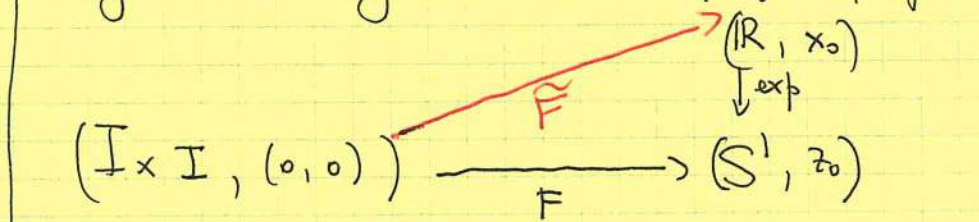
$\tilde{f}_0 : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_0(t) = t$.

Utilizzando le stesse tecniche che per il Sollevamento di Cammino, si dimostra il seguente

Teorema (Sollevamento dell'Omotopia)
Consideriamo un'applicazione continua

$$F : I \times I \longrightarrow S^1$$

tale che $F(0,0) = z_0 \in S^1$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un qualsiasi punto di $\exp^{-1}(z_0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~xxxxxxxxx~~ tale che $\tilde{F}(0,0) = x_0$, ossia un'unica applicazione continua $\tilde{F}$ che rende commutativo il seguente diagramma di spazi topologici puntati:



$\exp \circ \tilde{F} = F$
$\tilde{F}(0,0) = x_0$

Dim Vedi ad esempio [Kosniowski, Lemma 16.5 p. 155].
Si usa il Lemma sul numero di Lebesgue e la costruzione induttiva come sopra, applicata ai rettangoli invece che agli intervalli.

Come conseguenza, abbiamo il seguente fondamentale risultato:

Corollario

Siano $f, g : I \longrightarrow S^1$ due lacci chiusi in S^1 aventi come punto base $1 \in S^1$, cioè $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 1$.

Siano poi $\tilde{f}, \tilde{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due sollevamenti di f e g, rispettivamente, aventi lo stesso punto iniziale, cioè tali che

$$\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0).$$

Allora

$$f \text{ e } g \text{ sono equivalenti} \iff \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$$

($\Rightarrow$) Dim

Supponiamo dapprima che f e g siano equivalenti.

Allora esiste un'omotopia relativa a $\{0,1\}$:

$$F : I \times I \longrightarrow S^1$$

$$F(t,0) = f(t), \quad F(t,1) = g(t) \quad \forall\, t \in I$$

$$F(0,s) = F(1,s) = 1 \in S^1 \quad \forall\, s \in I$$

Per il Teorema di Sollevamento dell'Omotopia, esiste un sollevamento **unico**

$$\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{di } F, \text{ con}$$

con $\tilde{F}(0,0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) \in \mathbb{R}$

Osserviamo che

$\tilde{F}(t,0)$ è un sollevamento di f con $\tilde{F}(0,0) = \tilde{f}(0)$

$\tilde{F}(t,1)$ è un sollevamento di g con $\tilde{F}(0,1) = \tilde{g}(0)$

Poiché il sollevamento con punto iniziale fissato è unico, avrò

$$\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}(t) \qquad \forall\, t \in I$$
$$\tilde{F}(t,1) = \tilde{g}(t)$$

Sia ora $s \in I$, allora

$$\exp(\tilde{F}(1,s)) = F(1,s) = 1$$

cioè $\tilde{F}(1,s) \in \mathbb{Z}$ - Dunque ho una funzione continua

$$\tilde{F}(1,\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{Z}$$

e, siccome I è connesso, segue che $\tilde{F}(1,\cdot)$ è costante, cioè $\tilde{F}(1,s)$ non dipende da s.
In particolare

$$\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{g}(1), \text{ come voluto.}$$

<u>Oss</u> Lo stesso argomento mostra che $\tilde{F}(0,s)$ è costante, dunque $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ è un'omotopia fra $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ relativa a $\{0,1\}$

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo ora che $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.
Allora $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale - Siccome $\tilde{f}, \tilde{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è uno spazio contraibile, segue che $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono omotope (relativamente a $\{0,1\}$), cioè esiste

$$\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che}$$
$$\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}(t), \quad \tilde{F}(t,1) = \tilde{g}(t) \quad \forall\, t \in I$$
$$\tilde{F}(0,s) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) \quad \forall\, s \in I$$
$$\tilde{F}(1,s) = \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$$

Allora affermo che $F = \exp \circ \tilde{F}$ è un'equivalenza di lacci fra f e g.

Infatti

$$F(t,0) = \exp\left(\tilde{F}(t,0)\right) = (\exp \circ \tilde{f})(t) = f(t)$$
$$F(t,1) = \exp\left(\tilde{F}(t,1)\right) = (\exp \circ \tilde{g})(t) = g(t)$$

$$F(0,s) = \exp\left(\tilde{F}(0,s)\right) = (\exp \circ \tilde{f})(0) = f(0) = g(0)$$
$$F(1,s) = \exp\left(\tilde{F}(1,s)\right) = (\exp \circ \tilde{f})(1) = f(1) = g(1)$$

Dunque f e g sono equivalenti, e la dimostrazione è conclusa ∎.

Def (grado)
Sia $f : I \to S^1$ un laccio chiuso con punto base $1 \in S^1$.
Allora definisco il grado di f come l'intero

$$\deg(f) = \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z},$$

dove $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ è l'unico sollevamento di f con $\tilde{f}(0) = 0$.

o "indice di avvolgimento"

Allora ho una funzione grado

$$\deg : \Omega(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Siccome per il Corollario precedente lacci equivalenti hanno lo stesso grado, segue che deg induce una funzione

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\deg([f]) = \tilde{f}(1)$$

Teorema

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dim Dimostriamo innanzitutto che deg è un omomorfismo di gruppi. Se $k \in \mathbb{Z}$ e $f : I \to S^1$ è un laccio con punto base 1, indichiamo con $\tilde{f}_k(t)$ l'unico sollevamento di f tale che $\tilde{f}_k(0) = k$.

Notiamo che $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}(t) + k$, dove $\tilde{f}(0) = 0$.

Poniamo $h = \tilde{f}(1) + k = \tilde{f}_k(1)$

Sia ora $g : I \to S^1$ un altro laccio con punto base 1, $\tilde{g}$ l'unico sollevamento con $\tilde{g}(0) = 0$ e $\tilde{g}_h$ l'unico sollevamento con $\tilde{g}_h(0) = h$.

Allora

$$h = \tilde{f}_k(1) = \tilde{g}_h(0)$$, per cui posso comporre ottenendo $\tilde{f}_k * \tilde{g}_h$

e si vede facilmente che si ha

$$\widetilde{(f * g)}_k = \tilde{f}_k * \tilde{g}_h$$

Allora anche

$$\deg([f][g]) = \widetilde{(f * g)}(1)$$

$$= (\tilde{f} * \tilde{g})_h(1) \qquad \text{dove } h = \tilde{f}(1)$$

$$= \tilde{g}_h(1)$$

$$= h + \tilde{g}(1)$$

$$= \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \deg([f]) + \deg([g]).$$

La surjettività di $\deg : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ è chiara.
Sia infatti

$$f : I \to S^1, \quad f(t) = \cos(2k\pi t) + i \operatorname{sen}(2k\pi t)$$

(questo è un cammino chiuso che si avvolge k volte in senso antiorario). Allora il sollevamento $\tilde{f}$ di f con punto iniziale 0 è dato da

$$\tilde{f} : I \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = kt$$

Allora

$$\deg[f] = \tilde{f}(1) = k$$

per cui ogni $k \in \mathbb{Z}$ può essere realizzato come grado di (una classe di omotopia di) un ~~cerchio~~ laccio.

Resta da mostrare l'iniettività. Siano f, g due lacci con punto base $1 \in S^1$ tali che

$$\deg[f] = \deg[g].$$

Ciò vuol dire $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$, dove $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono i sollevamenti con $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$.
Per un Corollario visto in precedenza, ciò vuol dire che f è equivalente a g, ossia $[f] = [g]$, come volevamo ∎

Conseguenze: (1) Sia X un cilindro, un nastro di Möbius o $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. In tutti questi casi X si retrae fortemente per deformazione su S^1, dunque $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$

(2) Sia T^2 il toro bidimensionale - Allora $\pi_1(T^2, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dato che T è omeomorfo a $S^1 \times S^1$

In generale, se $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ allora $\pi_1(T^n, x_0) = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$

Corollario

Non esiste nessuna retrazione $r: D^2 \to S^1$, dove D^2 è il disco bi-dimensionale

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dim Se una tale retrazione esistesse, indicando con $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ l'inclusione avremmo

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 \\ & \searrow^{id} & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array}$$

per cui, passando ai gruppi fondamentali con punto base 1, otteniamo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(D^2, 1) \\ & \searrow^{id} & \downarrow r_* \\ & & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \longrightarrow & \{1\} \\ & \searrow^{id} & \downarrow \\ & & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

assurdo!

Ma questo è assurdo, dato che D^2 è contraibile, dunque $\pi_1(D^2, 1) = \{1\}$ ∎

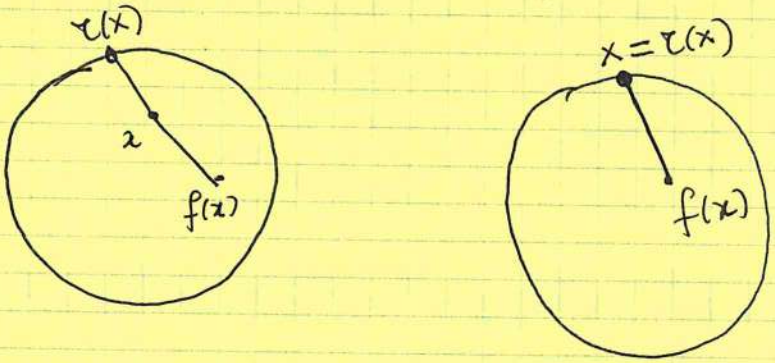
Corollario (Teorema del punto fisso di Brouwer - Caso 2-dimensionale)

Ogni funzione continua $f : D^2 \longrightarrow D^2$ ha almeno un punto fisso, cioè esiste almeno un $x \in D^2$ tale che $f(x) = x$

Dim

Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$.
Allora, per ogni $x \in D^2$ definiamo

$r(x)$ = il punto di intersezione di S^1 con l'unica semiretta uscente da $f(x)$ che contiene x.



Allora $r : D^2 \to S^1$ è una funzione continua.
Inoltre, dalla descrizione geometrica di $r(x)$ segue subito che $r(x) = x$ per ogni $x \in S^1$, cioè r è una retrazione di D^2 su S^1.
Ma questo contraddice il Corollario precedente. □

Come applicazione del Teorema del punto fisso di Brouwer, diamo la seguente ~~applicazione~~ dimostrazione di un risultato classico di Algebra Lineare, dovuto a Frobenius. Per maggiori dettagli si veda il Capitolo 9 di [Munkres]

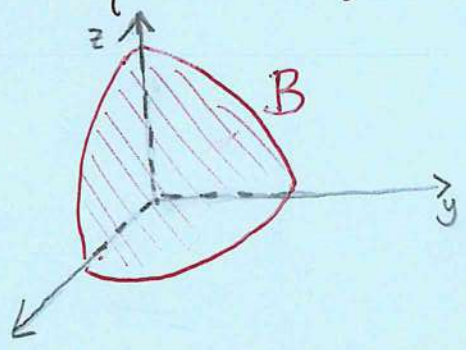
Teorema (Perron-Frobenius)
Sia $A \in Mat_3(\mathbb{R})$ una matrice reale 3×3 ad elementi tutti positivi. Allora A ha almeno un autovalore reale positivo.

Dim Si indichi con $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica, ossia $T(\underline{x}) = A\underline{x}$.

← Oss Un autovalore reale esiste sicuramente perché il polinomio caratteristico ha grado dispari.

Sia poi B l'intersezione della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con il primo ottante, ossia

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$



E' evidente che B è omeomorfo al disco D^2, dunque per il teorema del punto fisso di Brouwer ogni funzione continua $f: B \to B$ ha almeno un punto fisso.

Per ogni $\underline{x} \in B$, definiamo $f(\underline{x}) := \dfrac{T(x)}{\|T(x)\|} = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Siccome $\underline{x} \in B$, le coordinate x_1, x_2, x_3 di $\underline{x}$ sono

tutte non negative, e almeno una è strettamente positiva.
Allora, siccome gli elementi di A sono positivi per ipotesi, segue che il vettore $A\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ha tutte le componenti non negative, e quindi $f(\underline{x}) \in B$.
Quindi $f : B \longrightarrow B$, ed esiste pertanto $\underline{x}_0 \in B$ tale che $f(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$, ossia $\dfrac{A\underline{x}_0}{\|A\underline{x}_0\|} = \underline{x}_0$, in altre parole

$$A\underline{x}_0 = \|A\underline{x}_0\| \cdot \underline{x}_0 .$$

Questo mostra che $\underline{x}_0$ è un autovettore per A, con autovalore dato $\|A\underline{x}_0\| > 0$

∎

Il Teorema di Seifert - Van Kampen

$X = A \cup B$, $A \cap B$ connessi per archi (51)
Si vuole descrivere $\pi_1(X)$ in termini di $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$, $\pi_1(A \cap B)$

Gruppi Liberi

Sia S un insieme, e pensiamo gli elementi $s \in S$ come simboli non commutativi. Utilizziamo ora questi simboli per formare delle parole, ossia espressioni della forma

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

dove $x_i \in S$ e $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ (qui i simboli x_i non sono necessariamente distinti) - In altre parole, dall'insieme $S = \{x_i \mid i \in I\}$ viene formato un alfabeto $\{x_i, x_i^{-1} \mid i \in I\}$ che viene usato per formare parole. Fra le parole è inclusa anche la "parola vuota", che non contiene alcun simbolo ed è indicata con ϕ. Se l'esponente ε_i è uguale a 1 non lo scriveremo, cioè scriveremo x invece di x^1 ($x \in S$)

Una parola si dice ridotta se non contiene il simbolo x seguito da x^{-1}, o viceversa, per alcun $x \in S$; ad esempio,

$x x x$ è una parola ridotta, mentre
$x x x^{-1}$ non lo è.

A partire da una parola qualunque, si ottiene un'unica parola ridotta cancellando le coppie $x x^{-1}$ e $x^{-1} x$; ad esempio

$x_1^{-1} x_2 x_2^{-1} x_1 x_3$ si riduce a $x_1^{-1} x_1 x_3$, che a sua volta si riduce a x_3.

Due parole sono da considerarsi ~~identiche~~ equivalenti se le rispettive parole ridotte sono identiche, cioè contengono gli stessi simboli nello stesso ordine: è facile verificare che questa è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle parole costruite con il nostro alfabeto; ogni classe d'equivalenza contiene esattamente un rappresentante ridotto.

Giustapponendo due parole, e riducendo il risultato a necessario, si ottiene una legge di composizione per le classi di equivalenza di parole (o, che è lo stesso, per parole ridotte), rispetto alla quale l'insieme delle parole ridotte forma un gruppo, che si indica con $F(S)$ e viene detto "gruppo libero nell'insieme S" o "gruppo libero generato da S".

Ad esempio,

$$(x_1 x_2)\cdot(x_3 x_1^{-1}) = x_1 x_2 x_3 x_1^{-1}$$

$$(x_1 x_2)(x_2^{-1} x_4) = x_1 x_2 x_2^{-1} x_4 = x_1 x_4$$

L'elemento neutro è la parola vuota ϕ, e l'inverso della parola $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ è $x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}$

↳ Se $x \in S$, la parola $x\cdot x$ sarà indicata con x^2, $x\cdot x\cdot x$ con x^3, $x^{-1}\cdot x^{-1}$ con x^{-2} e così via.

Osservazione

In questa costruzione la natura dell'insieme S non è rilevante. Se S' è un altro insieme in corrispondenza biunivoca con S, allora i due gruppi liberi $F(S)$ e $F(S')$ sono fra loro isomorfi.

Per evitare di appesantire la notazione, nel seguito indicheremo la classe di equivalenza di una parola w con la stessa lettera w.

Se $|S| = n$, chiameremo $F(S)$ il gruppo libero su n generatori.

Se $n=1$, cioè se $S = \{x\}$, allora $F(S)$ è formato da tutte le parole ridotte della forma

$$\{\phi,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \dots,\ x^{-1},\ x^{-2},\ x^{-3},\ \dots\} = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

dove x^0 corrisponde alla parola vuota.

Allora

$$F(\{x\}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x^n \longrightarrow n$$

è un isomorfismo di gruppi, in particolare $F(\{x\})$ è abeliano, infinito.

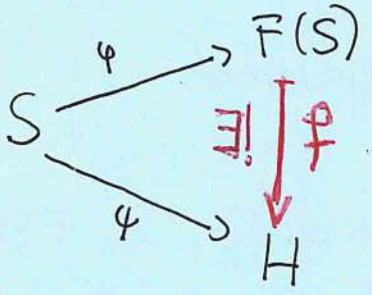
Si noti che per $n \geq 2$ si ha che il gruppo libero su n generatori è infinito e non abeliano. Infatti, se $S = \{x, y\}$, allora $F(S)$ contiene gli infiniti elementi x^n, y^n $(n \in \mathbb{Z})$, e inoltre $xy \neq yx$.

Il gruppo libero $F(S)$ generato dall'insieme S possiede la seguente importante proprietà universale.

Teorema (Proprietà universale del gruppo libero)
Sia S un insieme, $F(S)$ il gruppo libero generato da S e $\varphi: S \longrightarrow F(S)$ l'inclusione naturale, cioè la mappa che associa ad $x \in S$ la parola $x \in F(S)$.

Allora, per ogni gruppo H e ogni funzione $\psi: S \longrightarrow H$, esiste unico un omomorfismo di gruppi $f: F(S) \longrightarrow H$ che rende il seguente diagramma commutativo:

(*)



$\psi = f \circ \varphi$

Dim
Sia $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} = w$ una parola in $F(S)$. Allora definiamo

$$f(w) = \psi(x_1)^{\varepsilon_1} \cdots \psi(x_n)^{\varepsilon_n}.$$

Chiaramente f è un omomorfismo di gruppi ed ha la proprietà voluta ∎

Osservazione In molti testi, la definizione di "gruppo libero su un insieme S" viene data a partire dalla proprietà universale. In altre parole, si dice ~~gruppo F(S)~~ gruppo libero su S una terna $(S, F(S), \varphi)$ dove

- S è un insieme
- $F(S)$ è un gruppo
- $\varphi: S \longrightarrow F(S)$ è una funzione

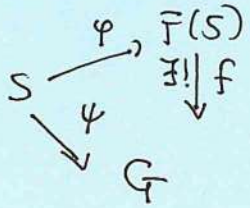
tale che, per ogni gruppo H e ogni funzione $\psi: S \longrightarrow H$, esiste un unico omomorfismo di gruppi $f: F(S) \to H$ che rende commutativo il diagramma (*).

Si dimostra che $F(S)$ è unico a meno di isomorfismi, e coincide pertanto col gruppo delle parole ridotte su S (con operazione data dalla concatenazione di parole).

Proposizione
Ogni gruppo G è quoziente di un gruppo libero.

(o un insieme di generatori di G)

Dim Sia S l'insieme degli elementi di G, e $F(S)$ il corrispondente gruppo libero con inclusione $\varphi: S \longrightarrow F(S)$
Sia poi $\psi: S \longrightarrow G$ la funzione che associa all'elemento g di G se stesso. Allora, per la proprietà universale del gruppo libero, esiste un unico omomorfismo di gruppi $f: F(S) \to G$ che rende commutativo il diagramma seguente:



Si noti che la mappa $f : F(S) \longrightarrow G$ associa alla parola ridotta $w = g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \dots g_m^{\varepsilon_n}$ il corrispondente elemento del gruppo G (dove ora si considerano i g_i moltiplicati secondo la legge di gruppo). In particolare, se $g \in S$ si ha $f(g) = g$, dunque f è suriettiva. Per il Primo Teorema di Isomorfismo segue allora che

$$G = F(S)/\ker f$$

∎

Esempio (1)

Consideriamo $G = \mathbb{Z}_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ dove x è il generatore. Allora, posto $S = \{x\}$, ho un epimorfismo

$$\begin{aligned} f : F(S) &\longrightarrow G \\ 1 &\longrightarrow 1 \\ x &\longrightarrow x \\ &\vdots \\ x^k &\longrightarrow x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il nucleo di f è il sottogruppo normale generato da x^n, dunque

$$G = F(S)/\ker f = \frac{F(\{x\})}{\langle x^n \rangle}.$$

Si noti che $F(\{x\})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e, via questo isomorfismo, $\langle x^n \rangle$ si identifica con $n\mathbb{Z}$. Allora ritroviamo l'isomorfismo di gruppi

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Esempio (2)

Consideriamo $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Allora G ha due generatori x, y che commutano fra loro

$$xy = yx$$

(Ad esempio, se si identifica $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con le coppie $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ allora $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$, dove $\mathbb{Z}$ si vede con la moltiplicazione

addittiva).

Posto $S = \{x, y\}$, ho un epimorfismo di gruppi

$$F(S) \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$\ker f$ è il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ che contiene l'elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Indicando tale sottogruppo con N, ho

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = F(S)/N$$

Esempio (3) Gruppi liberi abeliani

Sia S un insieme. Se ripetiamo la stessa costruzione fatta per il gruppo libero, considerando questa volta gli elementi di S come simboli commutativi, otteniamo la costruzione di quello che si chiama gruppo libero abeliano su S, che indicheremo con $F^{ab}(S)$. In questo caso le parole ridotte possono essere tutte scritte nella forma

$$w = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

dove $x_1, \dots, x_k \in S$ sono elementi distinti e $n_i \in \mathbb{Z}$ (ad esempio, $x_1 x_2 x_1^2$ diventa $x_1^3 x_2$).

La proprietà universale per gruppi liberi abeliani può allora essere scritta come segue:

Per ogni gruppo abeliano H e ogni funzione $\psi : S \to H$, esiste unico un omomorfismo di gruppi abeliani $f : F^{ab}(S) \to H$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & F(S) \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow f \\ & & H \end{array}$$

La dimostrazione è analoga a quella vista nel caso non abeliano, ed è lasciata per esercizio.

Analogamente, si dimostra che

> [Ogni gruppo abeliano G è isomorfo ad un quoziente di un gruppo libero abeliano.]

Esercizio 1

Sia $S = \{\text{insieme formato da } n \text{ elementi}\}$.
Si dimostri che

$$F^{ab}(S) = \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

cioè un gruppo libero abeliano su un insieme di n generatori è il prodotto di n copie di $\mathbb{Z}$.

Esercizio 2 Ricordiamo che, se G è un gruppo e $x, y \in G$, il commutatore di x e y è definito come l'elemento

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

(in particolare, G è abeliano $\Leftrightarrow$ tutti i suoi commutatori sono banali).

Indichiamo con $[G, G]$ il sottogruppo di G generato da tutti i commutatori: esso è chiamato il sottogruppo commutatore, o sottogruppo derivato di G.

(1) Dimostrare che $[G, G]$ è normale in G;
(2) Si dimostri che $G/[G, G]$ è un gruppo abeliano (detto l'abelianizzato di G);
(3) Viceversa, si dimostri che se $N \triangleleft G$ e G/N è abeliano,

allora $[G, G] \subset N$;

(4) se S è un qualsiasi insieme, si dimostri che

$$F^{ab}(S) = F(S)^{ab}$$

In altre parole, il gruppo libero abeliano su S è isomorfo all'abelianizzato del gruppo libero su S.

Generatori e relazioni.

Sia S un insieme di generatori per un gruppo G (in altre parole, ogni elemento di G si scrive come prodotto di un numero finito di elementi di S) e sia $F(S)$ il gruppo libero generato da S, $\varphi: S \hookrightarrow F(S)$ l'inclusione. Abbiamo visto che per la proprietà universale esiste sempre un'omomorfismo unico

$$F(S) \xrightarrow{f} G,$$

quando, posto $N := \ker f$, abbiamo $G = F(S)/N$.

Supponiamo di avere un insieme $R = \{r_i\}_{i \in I}$ di generatori per N, di modo tale che N è il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ che contiene ciascuno degli r_i. Allora scriveremo

$$G = \langle S \mid R \rangle$$

e diremo che questa è una presentazione di G per mezzo dell'insieme di generatori S e dell'insieme di relazioni R.

In pratica, G si ottiene dal gruppo libero $F(S)$ imponendo che ogni parola $r_i \in R$ sia uguale all'identità. Inoltre si scrive

Un gruppo si dice a presentazione finita se sia S che R sono insiemi finiti; si dice finitamente generato se S è finito e fi $G = \langle S \mid r = 1 \ \forall r \in R \rangle$

La presentazione $\langle S \mid R \rangle$ si dice finita se sia S che R sono insiemi finiti; il gruppo G si dice finitamente presentato se ammette almeno una presentazione finita.

È importante notare che un gruppo ammette in generale

molte differenti presentazioni, e spesso è praticamente impossibile stabilire se presentazioni differenti danno luogo a gruppi isomorfi (forse precisamente, si sa che il "problema della parola" è indecidibile per alcune classi di gruppi finitamente presentati).

Oss Ogni gruppo finito è finitamente presentato: come S si può prendere tutto G e come R la tavola di moltiplicazione. Se $|G|=n$, ho $n-1$ generatori e $(n-1)^2$ relazioni.

Esempio 1 Il gruppo libero su S, $F(S)$, ha S come insieme di generatori e nessuna relazione, per cui

$$F(S) = \langle S \mid \phi \rangle$$

Esempio 2 Il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_n$ è generato da un singolo elemento x, soggetto all'unica relazione non banale $x^n = 1$. Per cui possiamo scrivere

$$\mathbb{Z}_n = \langle x \mid x^n \rangle$$

Esempio 3 Il gruppo libero abeliano su S, $F^{ab}(S)$, è generato da S e le uniche relazioni non banali sono quelle che impongono la commutatività degli elementi. Allora

$$F^{ab}(S) = \langle S \mid xyx^{-1}y^{-1},\ x,y \in S \rangle$$

Ad esempio, $\mathbb{Z} = \langle x \mid \phi \rangle$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \rangle$ gruppo libero abeliano su due generatori

$\vdots$

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1} \quad \forall i,j \rangle$$

Più in generale, se $G = \langle S \mid R \rangle$, allora $G^{ab} := G/_{[G,G]} = \langle S \mid R' \rangle$ dove $R' := R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x,y \in S\}$

Esempio 4 Il gruppo diedrale di ordine $2n$, indicato con D_{2n}, è il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di n lati. Esso è generato da una rotazione x, che ha ordine n, e da una riflessione y, che ha ordine 2. Esso non è commutativo, dato che $xy = yx^{-1}$. Allora

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n, y^2, xyxy \rangle$$

In particolare, per $n=3$ si ottiene il gruppo simmetrico S_3:

$$S_3 = \langle x, y \mid x^3, y^2, xyxy \rangle$$

3-cicli x, x^2

2-cicli y, yx, yx^2

$yx = x^2y$ $\quad yx^2 = xy$

Esercizio

$$D_{2n}^{ab} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \text{ pari} \\ \mathbb{Z}_2 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

basta aggiungere $xyx^{-1}y^{-1}$ alla presentazione

Esempio 5 Siano $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$. Allora il prodotto diretto $G_1 \times G_2$ ammette la presentazione

$$G_1 \times G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R \rangle$$

dove $R = \{ [x_1, x_2] \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 \}$

Es: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \langle x, y \mid x^2, y^4, [x,y] \rangle$

In altre parole, il prodotto diretto ha per generatori l'unione dei generatori e per relazioni l'unione delle relazioni, insieme ad ulteriori relazioni che impongono la commutazione di ogni elemento di G_1 con ogni elemento di G_2.

Ovviamente, è possibile definire nello stesso modo il prodotto diretto di un numero finito qualsiasi di gruppi finitamente presentati $G_i = \langle S_i \mid R_i \rangle$ $\quad i \in \{1, \dots, k\}$.

Prodotto libero di gruppi

Siano G_1, G_2 due gruppi, aventi presentazione

$$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle \,, \quad G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$$

Allora definisco prodotto libero di G_1 e G_2 il gruppo $G_1 * G_2$ avente presentazione

$$G_1 * G_2 := \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

Si nota che $G_1 \times G_2$ è un quoziente di $G_1 * G_2$, ottenuto quozientando quest'ultimo per il più piccolo sottogruppo normale contenente tutti i commutatori della forma $[x_1, x_2]$, $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.

Allo stesso modo, data una famiglia (finita), ~~(numerabile)~~, di gruppi

$$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle, \; G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle, \dots, G_k = \langle S_k \mid R_k \rangle$$

Allora il prodotto libero $G_1 * G_2 * \dots * G_k$ è il gruppo avente presentazione

$$G_1 * G_2 * \dots * G_k = \langle S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k \mid R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k \rangle$$

Esempio 1

Se $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ è un insieme formato da k elementi, allora

$$F(S) = \langle x_1, \dots, x_k \mid \phi \rangle = \langle x_1 \mid \phi \rangle * \langle x_2 \mid \phi \rangle * \dots * \langle x_k \mid \phi \rangle$$

$$= \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{k \text{ volte}}$$

In altre parole, il prodotto libero di k copie di $\mathbb{Z}$ è isomorfo al gruppo libero su un insieme S di k elementi.

Si osserva che il prodotto libero $G_1 * \dots * G_k$ non dipende dalle presentazioni scelte.

Esempio 2 Siano $\mathbb{Z}_2 = \langle x_1 \mid x_1^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle x_2 \mid x_2^2 \rangle$ due copie di $\mathbb{Z}_2$. Allora

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle x_1, x_2 \mid (x_1)^2, (x_2)^2 \rangle$$

Allora ogni elemento $g \neq 1$ di questo prodotto libero può scriversi in modo unico come un prodotto di x_1 e x_2, con i fattori x_1, x_2 che si alternano.

Ad esempio

$$x_1, \; x_1 x_2, \; x_1 x_2 x_1, \; x_1 x_2 x_1 x_2, \ldots$$

$$x_2, \; x_2 x_1, \; x_2 x_1 x_2, \; x_2 x_1 x_2 x_1, \ldots$$

sono tutti elementi. Si noti che $x_1 x_2$ e $x_2 x_1$ hanno entrambi ordine infinito, e sono differenti.
Pertanto $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ è un gruppo infinito non abeliano, pertanto molto differente dal gruppo finito abeliano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, che ha una presentazione della forma

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle x_1, x_2 \mid (x_1)^2, (x_2)^2, \; x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \rangle$$

$$= \langle x_1, x_2 \mid (x_1)^2, (x_2)^2, \; x_1 x_2 x_1 x_2 \rangle$$

(dato che $x_1^{-1} = x_1$ e $x_2^{-1} = x_2$).

Il prodotto libero di gruppi può, anch'esso, essere caratterizzato in termini di proprietà universale:

Teorema (Proprietà universale del prodotto libero)
Siano $G_1, \ldots, G_n$ gruppi e $G = G_1 * \cdots * G_n$ il loro prodotto libero. Supponiamo di avere omomorfismi di gruppi

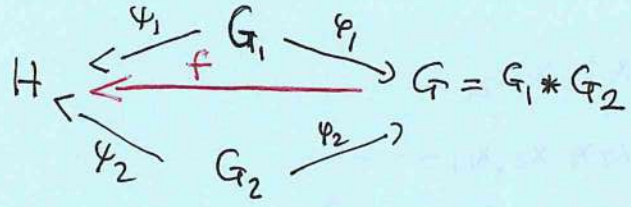
$$\varphi_i : G_i \longrightarrow H \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove H è un gruppo fissato. Allora esiste unico un omomorfismo di gruppi $f : G \longrightarrow H$ che rende commutativi tutti i diagrammi

$$G_i \xrightarrow{\varphi_i} G = G_1 * G_2 * \cdots * G_n \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$\varphi_i \searrow \; \downarrow f$$
$$H$$

(Qui $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ indica l'omomorfismo naturale che prende una parola $w \in G_i$ e le associa la stessa parola, vista come parola in $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_n$)

Dim La facciamo nel caso $n=2$, il caso con n arbitrario è analogo ed è lasciato per esercizio.



Abbiamo $G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$, dunque un elemento in $G_1 * G_2$ può essere rappresentato da una parola ridotta della forma

$$w = g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_k h_k, \qquad g_i \in G_1, \; h_j \in G_2$$

Allora definiamo

$$f(w) = \psi_1(g_1)\psi_2(h_1)\psi_1(g_2)\psi_2(h_2)\cdots\psi_1(g_k)\psi_2(h_k) \in H$$

Chiaramente, questa applicazione è un omomorfismo di gruppi e ha la ~~proprietà universale voluta~~ proprietà universale voluta. Infatti:

- se $g \in G_1$, allora $(f \circ \varphi_1)(g) = \psi_1(g)$
- se $h \in G_2$, allora $(f \circ \varphi_2)(h) = \psi_2(h)$ ∎

Oss Si può ovviamente enunciare una analoga proprietà universale nel caso di un prodotto diretto $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, prendendo omomorfismi di gruppi $\psi_i : G_i \longrightarrow H$ con H abeliano.

Prodotto amalgamato

Per enunciare il Teorema di Seifert-Van Kampen abbiamo bisogno della seguente generalizzazione del prodotto diretto, detto prodotto amalgamato.

Definizione

Siano G, H, F tre gruppi, con due omomorfismi

$$\varphi : F \longrightarrow G, \quad \psi : F \longrightarrow H$$

Supponiamo che G, H, F ammettano presentazioni

$$G = \langle S_G \mid R_G \rangle, \quad H = \langle S_H \mid R_H \rangle, \quad F = \langle S_F \mid R_F \rangle$$

Allora il prodotto amalgamato di G e H, rispetto a φ e ψ, è definito come il gruppo $G *_F H$, presentato da

$$G *_F H = \langle S_G \cup S_H \mid R_G \cup R_H \cup R \rangle$$

dove $R = \{ \varphi(f)\psi(f)^{-1} \mid f \in S_F \} = \{ \varphi(f) = \psi(f) \mid f \in S_F \}$

In altre parole, l'amalgamazione è una identificazione di $\varphi(F)$ e $\psi(F)$ in $G * H$, elemento per elemento (ricordiamo che $\varphi(F) \subseteq G$ e $\psi(F) \subseteq H$, quindi possono vedersi entrambi in $G * H$ per mezzo dell'inclusione di G e H nel loro prodotto diretto $G * H$).

Si noti che le relazioni di R_F non intervengono nella presentazione di $G *_F H$.

Esempio 1 $G = \mathbb{Z}_2$, $H = \mathbb{Z}_3$, $F = \mathbb{Z}$

$\| \quad \| \quad \|$

$\langle x \mid x^2=1 \rangle \quad \langle y \mid y^3=1 \rangle \quad \langle z \mid \phi \rangle$

Considereremo ora i due omomorfismi quozienti:

$\varphi : F \longrightarrow G$ $\qquad$ $\psi : F \longrightarrow H$

$\varphi(z) = x$ $\qquad$ $\psi(z) = y$

$(\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2)$ $\qquad$ $(\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3)$

Allora

$$\mathbb{Z}_2 *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = \langle x, y \mid x^2=1,\ y^3=1,\ \varphi(z)=\psi(z) \rangle$$

$$= \langle x, y \mid x^2=1,\ y^3=1,\ x = y \rangle$$

$$= \langle x \mid x^2=1,\ x^3=1 \rangle$$

$$= \langle x \mid x=1 \rangle = \{1\}$$

cioè il prodotto amalgamato in questo caso è il gruppo banale.

Esempio 2 $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{Z}$

$\| \quad \| \quad \|$

$\langle x \mid \phi \rangle \quad \langle y, \phi \rangle \quad \langle z, \phi \rangle$

Considereremo i due omomorfismi

$\varphi : F \longrightarrow G$ $\qquad$ $\psi : F \longrightarrow H$

$\varphi(z) = x^2$ $\qquad$ $\psi(z) = y^3$

Allora

$$\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \langle x, y \mid \varphi(z) = \psi(z) \rangle$$

$$= \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle.$$

Questo è un gruppo infinito (non abeliano) che è isomorfo al cosiddetto gruppo delle trecce su due generatori (e corrisponde al gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di un nodo toroidale di tipo $(2,3)$).

Il teorema di Seifert-Van Kampen - Enunciato

Sia $X = U \cup V$ uno spazio topologico che si scrive come unione di due aperti U, V connessi per archi, con intersezione $U \cap V$ non vuoto e connesso per archi. (ipotesi fondam.)

Sia $x_0 \in U \cap V$. Allora ho un diagramma commutativo di spazi topologici puntati

$$\begin{array}{ccccc} & & (U, x_0) & & \\ & \overset{i}{\nearrow} & & \overset{\varphi}{\searrow} & \\ (U \cap V, x_0) & & & & (X, x_0) \\ & \underset{j}{\searrow} & & \underset{\psi}{\nearrow} & \\ & & (V, x_0) & & \end{array}$$

dove tutte le frecce sono inclusioni.

Allora ho un corrispondente diagramma commutativo di gruppi fondamentali

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \overset{i_*}{\nearrow} & & \overset{\varphi_*}{\searrow} & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & & & & \pi_1(X, x_0) \\ & \underset{j_*}{\searrow} & & \underset{\psi_*}{\nearrow} & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

Allora abbiamo il seguente fondamentale risultato.

Teorema (Seifert-Van Kampen) Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al prodotto amalgamato di $\pi_1(U, x_0)$ e $\pi_1(V, x_0)$ rispetto a i_* e j_*. In simboli

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$$

In questo modo si può dare una presentazione di $\pi_1(X, x_0)$ in termini di $\pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(V, x_0)$ e $\pi_1(U \cap V, x_0)$.

Sia

$$\pi_1(U, x_0) = \langle S_U \mid R_U \rangle$$

$$\pi_1(V, x_0) = \langle S_V \mid R_V \rangle$$

$$\pi_1(U \cap V, x_0) = \langle S_{U \cap V} \mid R_{U \cap V} \rangle$$

Allora

$$\pi_1(X, x_0) = \langle S_U \cup S_V \mid R_U \cup R_V \cup R \rangle$$

dove $R = \{ i_*(s) = j_*(s) \text{ per ogni } s \in S_{U \cap V} \}$

Si noti ancora che l'intervento delle relazioni di $\pi_1(U \cap V, x_0)$ non interviene nell'enunciato.

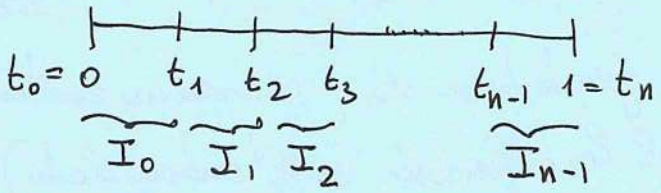
La dimostrazione del Teorema di Seifert - Van Kampen viene svolta solitamente in due passi. Nel primo si determinano i generatori, nel secondo le relazioni.

Noi dimostreremo il primo passo. Per il secondo passo, che non è difficile ma è piuttosto lungo e richiede una notazione pesante, rimandiamo il lettore ad un qualsiasi testo di Topologia Algebrica. Si veda ad esempio [Kosniowski, Capitolo 24].

Dimostrazione (Generatori di $\pi_1(X, x_0)$)

Mostriamo che $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $S_U \cup S_V$ (dunque esso è un quoziente del prodotto libero $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$).

Sia $x_0 \in U \cap V$ e consideriamo un lacet $\alpha : I \to X$ avente punto base x_0. Consideriamo ora il ricoprimento aperto $\mathcal{A} = \{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$ di I, e suddividiamo $I = [0,1]$ in sottointervalli



aventi tutti lunghezza minore del numero di Lebesgue di $\mathcal{A}$. Ciò implica che ogni intervallo I_k è contenuto interamente in $\alpha^{-1}(U)$ o in $\alpha^{-1}(V)$, in altre parole $\alpha(I_k)$ è completamente contenuto in U oppure è interamente contenuto in V.

Possiamo supporre che $\alpha(t_i) \in U \cap V$ per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Infatti, se $\alpha(t_i) \notin U \cap V$, allora $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ e $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ sono entrambi contenuti in U oppure in V; segue che $\alpha([t_{i-1}, t_{i+1}])$ è tutto contenuto in U oppure in V, dunque si può eliminare il punto t_i dalla suddivisione; rienumeriamo i punti rimanenti e ripetiamo il procedimento si arriva ad una suddivisione in cui $\alpha(t_i) \in U \cap V$ per ogni i, come affermato.

Siccome $U \cap V$ è per ipotesi connesso per archi, posso scegliere per ogni i un cammino $\beta_i : I \to U \cap V$ che unisce x_0 ad $\alpha(t_i)$. Inoltre, indichiamo con $\alpha_i : I \to X$ la composizione

$$I \xrightarrow{h_i} [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow{\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}} X$$

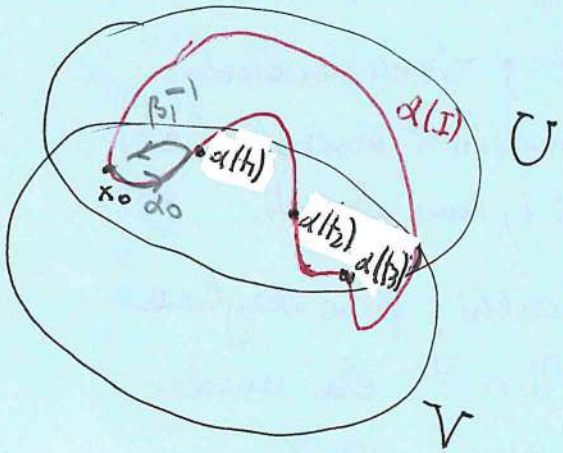
dove $h_i(t) = (1-t)t_i + t\,t_{i+1}$ è l'unico omeomorfismo

buone fra I e $[t_i, t_{i+1}]$ che conserva l'orientazione.
Allora: $\alpha_i(0) = \alpha(t_i)$, $\alpha_i(1) = \alpha(t_{i+1})$, cioè
$h_i : I \longrightarrow X$ è un arco da $\alpha(t_i)$ ad $\alpha(t_{i+1})$
tutto contenuto in U o tutto contenuto in V (dato che
$\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ha questa proprietà).

Segue che

$$\underbrace{\alpha_0 * \beta_1^{-1}}_{\gamma_0}, \underbrace{\beta_1 * \alpha_1 * \beta_2^{-1}}_{\gamma_1}, \underbrace{\beta_2 * \alpha_2 * \beta_3^{-1}}_{\gamma_2}, \dots, \underbrace{\beta_{n-1} * \alpha_{n-1}}_{\gamma_{n-1}}$$

Sono cammini chiusi con punto base x_0, ciascuno contenuto
o in U o in V, e il loro prodotto (nell'ordine dato)
è equivalente ad α. In altri termini, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$
si scrive come prodotto delle classi di cammini chiusi $[\gamma_0], [\gamma_1], \dots, [\gamma_{n-1}]$,
e ciascun γ_i sta in U o in V, dunque ciascuno di essi è
un elemento di $\pi_1(U, x_0)$ oppure un elemento di $\pi_1(V, x_0)$.
Segue che le classi di lacci chiusi in $\pi_1(U, x_0)$ e in $\pi_1(V, x_0)$
generano $\pi_1(X, x_0)$, come affermato. ∎



Oss L'idea delle relazioni

$$i_*(s) = j_*(s) \quad (s \in S_{U \cap V})$$

è che un lacco chiuso contenuto
in $U \cap V$ deve dare la stessa
classe di omotopia in $\pi_1(X, x_0)$,
sia che lo si veda come elemento
di $\pi_1(U, x_0)$ sia che lo si veda
come elemento di $\pi_1(V, x_0)$.

Corollario 1 Se U e V sono semplicemente connessi, cioè se $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$, allora

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

Dim $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di $\pi_1(U, x_0)$ e $\pi_1(V, x_0)$, dunque il risultato segue subito ∎

Esempio di applicazione Mostriamo che $\boxed{\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}}$ per $n \geq 2$. Siano $N = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$, $S = (0, \dots, 1) \in S^n$ i due "poli" nord e sud di S^n, e poniamo

$$U = S^n - \{N\}$$
$$V = S^n - \{S\}$$
$$\Rightarrow U \cap V = S^n - \{N, S\},$$ che è connesso per archi se $n \geq 2$.

Ora, U è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per proiezione stereografica, e lo stesso vale per V. Pertanto $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$, unque per il Teorema di Seifert - Van Kampen si ha

$$\boxed{\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}}$$

Si noti che per $n = 1$ questa dimostrazione fallisce (dato che $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$). Il punto è che $S^1 - \{N, S\}$ non è connesso, in particolare non è connesso per archi.

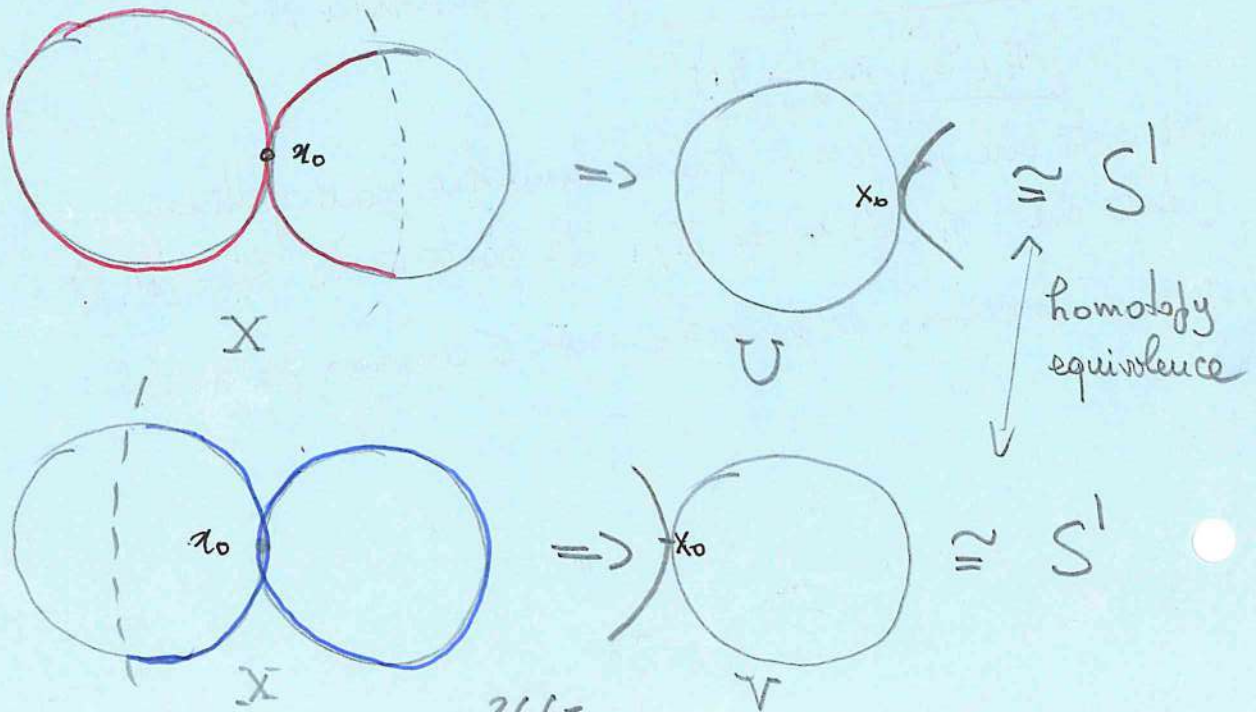
Corollario 2 Supponiamo che $U \cap V$ sia semplicemente connesso, cioè $\pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}$. Allora S.v.K. dà la seguente presentazione per $\pi_1(X)$:

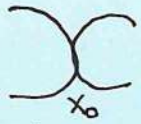
$$\pi_1(X) = \langle S_U \cup S_V \mid R_U \cup R_V \rangle$$
$$= \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$$

Esempio di applicazione in quest'ultimo caso.

Consideriamo $X = S^1 \vee S^1$ [due circonferenze che si toccano in un solo punto] – Lo stesso identico risultato si ottiene prendendo una cosa "a forma di otto", che è chiaramente omeomorfa a $S^1 \vee S^1$.

Ora scegliamo aperti U e V come in figura, prendendo come punto base per i lacci il punto di tangenza delle due circonferenze



Allora $U \cap V =$ 

, che è chiaramente uno spazio topologico contrattile, in particolare semplicemente connesso.

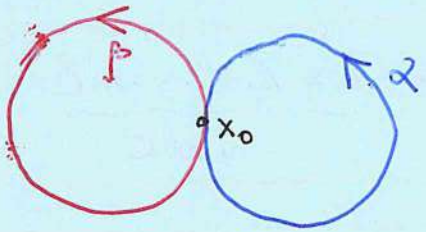
~~Allora~~ Invece U e V sono chiaramente omotopicamente equivalenti ad S^1, quindi

$$\pi_1(U, x_0) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(V, x_0) = \mathbb{Z}.$$

Segue che

$$\pi_1(X) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Possiamo prendere come generatori di $\pi_1(X, x_0)$ le classi di due lacci α, β con punto base x_0 che si avvolgono una volta intorno alle due circonferenze:



Come conseguenza, se X è un qualsiasi spazio topologico che ammette $S^1 \vee S^1$ come retratto forte di deformazione, allora $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Ad esempio, ciò è vero se

$X =$ disco meno 2 punti
foro meno 2 punti
Sfera meno 3 punti
Toro meno un punto

, quindi

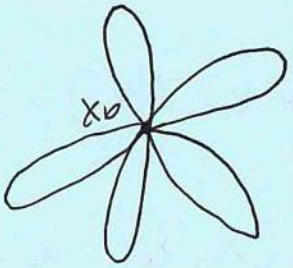
$$\pi_1(\mathbb{D}^2 - \{p,q\}, x_0) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p,q\}, x_0) = \pi_1(S^3 - \{p,q,r\}, x_0)$$
$$= \pi_1(T^2 - \{p\}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Ragionando per induzione si vede subito che, se

$$X = \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$$

(un bouquet di n circonferenze, topologicamente equivalente ad un "fiore con n petali") allora

$$\boxed{\pi_1(X) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}}$$



$X = S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$

I generatori di $\pi_1(X, x_0)$ sono gli n lacci che si avvolgono una volta intorno ad ogni petalo.

Siccome $\mathbb{R}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$ si retrae fortemente per deformazione su $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$, allora

$$\boxed{\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}}$$

Analogamente:

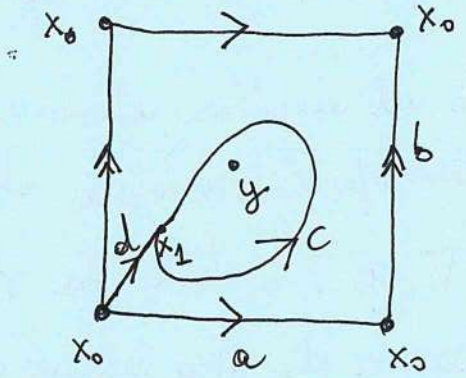
$$\boxed{\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_{n+1}\}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}}$$

Altri esempi di applicazione del Teorema di Seifert - Van Kampen

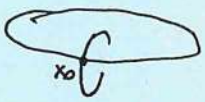
Esempio: Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$

Sappiamo già che $\pi_1(T^2, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Vogliamo ora ritrovare tale risultato per mezzo del Teorema di Seifert - Van Kampen.

Realizziamo il toro come spazio di identificazione del quadrato, nel modo usuale:



Con questa identificazione, i lati a e b diventano circonferenze che si intersecano nel solo punto x_0.



Sia y il centro del quadrato, e poniamo $U := T^2 - \{y\}$

Sia V la parte interna del quadrato (o meglio, la sua immagine in T^2 per mezzo della nostra identificazione).

Allora U, V sono aperti e connessi per archi,

$U \cap V = V - \{y\}$ è aperta e connessa per archi

$T^2 = U \cup V$.

Sia ora $x_1 \in U \cap V$ e notiamo che:

- V è omeomorfo ad un disco aperto, dunque $\pi_1(V, x_1) = \{1\}$
- U si retrae fortemente per deformazione sul bordo del quadrato, che è omeomorfo al bouquet di due cerchi a e b.

Allora $\pi_1(U, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \phi \rangle$, dove α e β sono le classi di omotopia dei due cammini che si avvolgono una volta intorno ad a e b nel senso indicato dalla freccia.

Se δ è la classe di omotopia di un cammino da x_0 a x_1, è allora chiaro che $\pi_1(U, x_1)$ è un gruppo libero con presentazione

$$\pi_1(U, x_1) = \langle \alpha', \beta' \mid \phi \rangle \quad \text{dove} \quad \begin{matrix} \alpha' = \delta^{-1} \alpha \delta \\ \beta' = \delta^{-1} \beta \delta \end{matrix}$$

- Infine, $U \cap V$ è omeomorfo ad un disco aperto meno un punto, dunque ha lo stesso tipo di omotopia di S^1. Un generatore per $\pi_1(U \cap V, x_1)$ è dato da γ, la classe di omotopia di un laccio c che gira intorno a y una volta.

Allora

$$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U) \quad \text{è dato da}$$
$$i_*(\gamma) = \alpha' \beta' (\alpha')^{-1} (\beta')^{-1}$$

$$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(V) = \{1\} \quad \text{è la mappa banale}$$

$\pi_1(U \cap V, x_1) = \langle \gamma \mid \phi \rangle$, $\pi_1(U, x_1) = \langle \alpha', \beta' \mid \phi \rangle$, $\pi_1(V, x) = \{1\}$

pertanto per S-V.K:

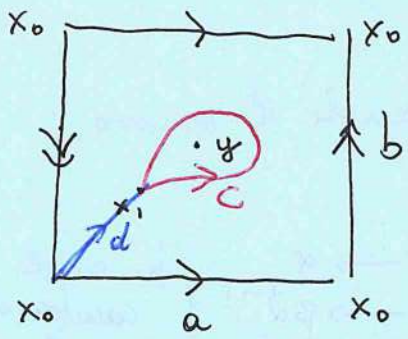
$$\pi_1(T^2, x_1) = \langle \alpha', \beta' \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma) \rangle = \langle \alpha', \beta' \mid \alpha' \beta' (\alpha')^{-1} (\beta')^{-1} = 1 \rangle$$

e cambiando punto base si vede subito che

$$\pi_1(T^2, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} = 1 \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Esempio: La bottiglia di Klein.

Utilizziamo lo stesso procedimento utilizzato nel caso di T^2 per calcolare il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein.



Come prima, sia $U = X - \{y\}$ e V la parte interna del quadrato. Indicando con a, b le circonferenze in figura, con x_1 un punto in $U \cap V = V - \{y\}$ e con δ un cammino da x_0 e x_1, utilizzando le lettere greche per indicare le classi di omotopia dei cammini si ha:

- $\pi_1(V, x_1) = \{1\}$
- $\pi_1(U, x_1) = \langle \alpha', \beta' \mid \phi \rangle$ $\qquad \alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$, $\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$
- $\pi_1(U \cap V, x_1) = \langle \gamma \mid \phi \rangle$

Guardando la figura, si vede subito che

$$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U, x_1) \quad \text{è dato da}$$
$$i_*(\gamma) = \alpha'\beta'(\alpha')^{-1}\beta'$$

mentre

$$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(V, x_1) = \{1\}$$

è necessariamente la mappa banale.

Allora, per S-vK si ha

$$\pi_1(X, x_1) = \langle \alpha', \beta' \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma) \rangle = \langle \alpha', \beta' \mid \alpha'\beta'(\alpha')^{-1}\beta' = 1 \rangle$$

e coniugando tutto per α si ottiene

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1 \rangle$$

Questo è un gruppo infinito non commutativo, dato che

$$\alpha\beta = \beta^{-1}\alpha.$$

Possiamo "cambiare coordinate", introducendo il nuovo sistema di generatori

$$\alpha \longrightarrow x \qquad \beta \longrightarrow xy$$

(da cui $x \longrightarrow \alpha$, $y \longrightarrow \alpha^{-1}\beta$, in cui il cambio di generatori è biettivo)

Allora

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta \longrightarrow x(xy)x^{-1}(xy) = x^2y^2$$

da cui otteniamo la nuova presentazione

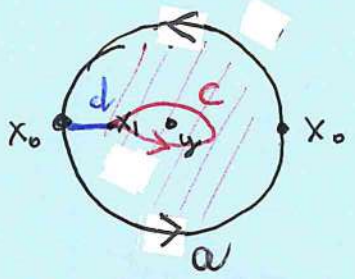
$$\pi_1(X, x_0) = \langle x, y \mid x^2y^2 = 1 \rangle$$

o anche, posto $z = y^{-1}$:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle x, z \mid x^2 = z^2 \rangle$$

Esempio: Il piano proiettivo reale

$X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è lo spazio di identificazione seguente:



Utilizziamo la stessa retrazione vista in precedenza.
Dunque si ha

$$U = X - \{y\}, \quad V = \text{parte interna del disco},$$
$$U \cap V = V - \{y\}$$

$\pi_1(V, x_1) = \{1\}$

$\pi_1(U, x_1) = \{\alpha^1 \mid \phi\rangle$, dato che U si retrae sul bordo, che è topologicamente la circonferenza data dal cammino a. Qui $\alpha^1 = \delta \vec{a} \delta$

$\pi_1(U \cap V, x_1) = \langle \gamma \mid \phi \rangle$

Guardando la figura, si vede subito che

$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U, x_1)$ è data da
$i_*(\gamma) = (\alpha^1)(\alpha^1) = (\alpha^1)^2$

mentre

$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(V, x_1) = \{1\}$
è necessariamente la mappa banale.

Pertanto, per S.V.K,

$$\pi_1(X, x_1) = \langle \alpha^1 \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma) \rangle = \langle \alpha^1 \mid (\alpha^1)^2 = 1 \rangle$$

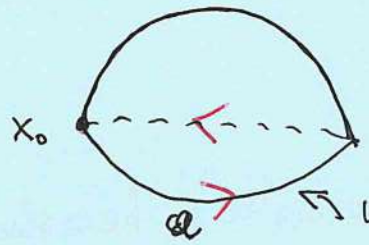
e, trovando il punto base originario

$$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle}$$

Dunque

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \simeq \mathbb{Z}_2$$

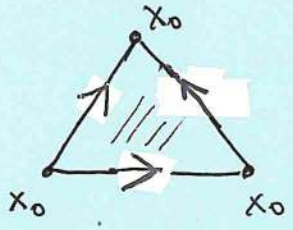
cioè il gruppo fondamentale dello spazio proiettivo reale è ciclico di ordine 2.

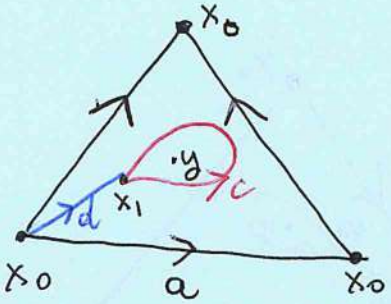


un generatore di $\mathbb{RP}^2$, visto come S^2_+ col bordo identificato antipodalmente.

Si noti che il laccio α non è omotopicamente banale, ma percorso due volte diventa omotopicamente banale!

Esempio: "Dunce hat"





Utilizzando le stesse notazioni della prima, otteniamo:

$U = X - \{y\}$, V = parte interna del triangolo, $U \cap V = V - \{y\}$

$\pi_1(V, x_1) = 1$

$\pi_1(U, x_1) = \langle \alpha' \mid \phi \rangle$ dato che U si retrae fortemente per deformazione sul bordo, che è topologicamente una circonferenza. Qui $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$

$\pi_1(U \cap V, x_1) = \langle \gamma \mid \phi \rangle$

Guardando la figura, si vede subito che

$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U, x_1)$ è data da

$i_*(\gamma) = (\alpha')(\alpha')(\alpha')^{-1} = \alpha'$

mentre

$\pi_1(U \cap V, x_1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(V, x_1) = \{1\}$

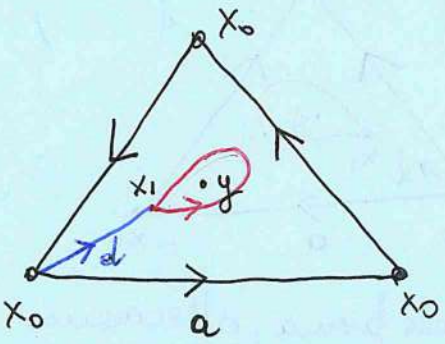
è necessariamente la mappa banale.

Pertanto, per S. v. K., si ha

$\pi_1(X, x_1) = \langle \alpha' \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma) \rangle = \langle \alpha' \mid \alpha' = 1 \rangle = \{1\}$

cioè il "dunce hat" è uno spazio topologico semplicemente connesso.

Esempio / esercizio Sia X lo spazio topologico ottenuto identificando i lati di un triangolo come in figura:

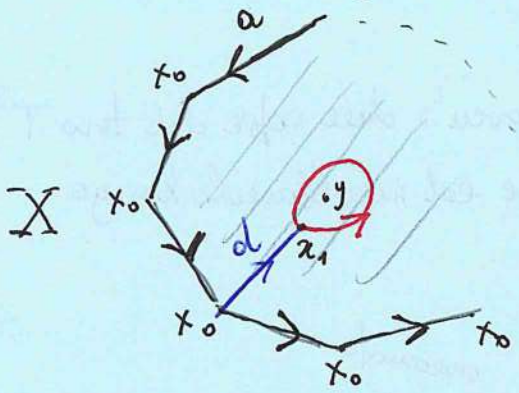


Ragionando esattamente come nel caso del "duno hat", posto $\alpha' = \delta^{-1} a \delta$, otteniamo la presentazione

$$\pi_1(\tilde{X}, x_1) = \langle \alpha' \mid (\alpha')^3 = 1 \rangle$$

da cui $$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha \mid \alpha^3 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_3}$$

Esempio L'esempio precedente può essere generalizzato; considerando lo spazio topologico X ottenuto identificando ciclicamente i lati di un poligono regolare di n lati come in figura



Ragionando come sopra, con le stesse convenzioni nella figura, e posto $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$, otteniamo la presentazione

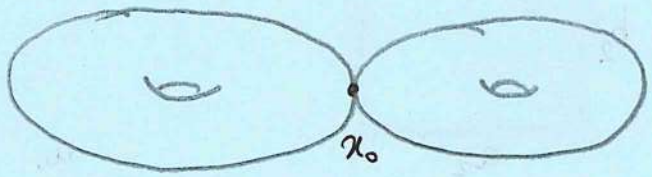
$$\pi_1(X, x_1) = \langle \alpha' \mid (\alpha')^n = 1 \rangle$$

da cui

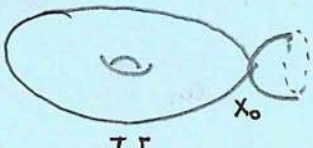
$$\boxed{\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha \mid \alpha^n = 1 \rangle = \mathbb{Z}_n}$$

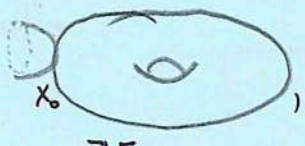
Si noti che ciò ha senso anche per $n = 2$, nel qual caso $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

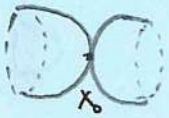
Esempio Sia X lo spazio ottenuto incollando due tori in un punto, cioè $X = T^2 \vee T^2$



Prendo i seguenti aperti:



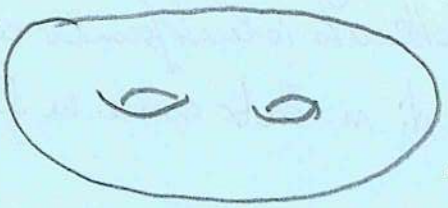


, da cui $U \cap V =$ 

Siccome $U \cap V$ è contraibile e U, V sono omotopicamente equivalenti a T^2, deduciamo

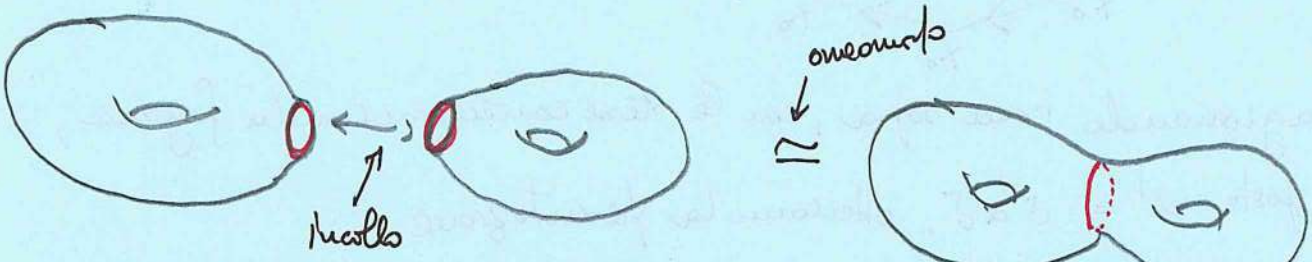
$$\boxed{\pi_1(T^2 \vee T^2, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \simeq \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2}$$

Esempio: Il toro con due buchi Σ_2



Σ_2

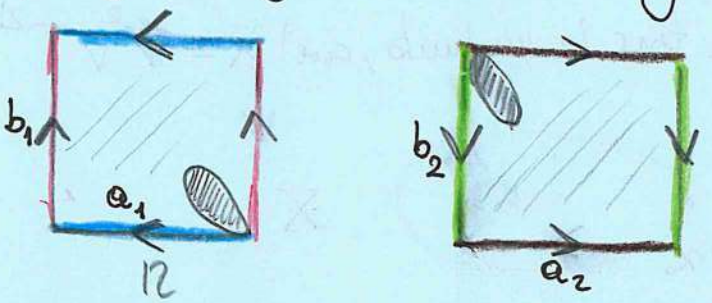
Si noti che Σ_2 può ottenersi prendendo due copie del toro T^2, rimuovendo un disco da ciascuna di esse ed incollando lungo il bordo del disco:



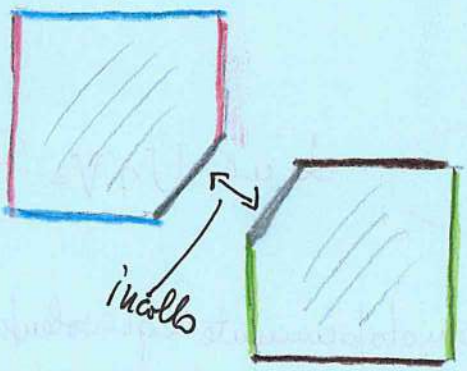
Il procedimento appena descritto si chiama "somma connessa" e si indica con "#". Quindi possiamo scrivere

$$\Sigma_2 \underset{\text{omeomorfo}}{\simeq} T^2 \# T^2$$

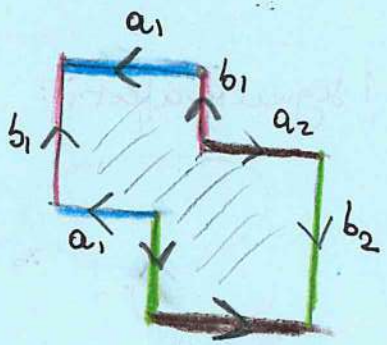
Possiamo ottenere Σ_2 come spazio di identificazione di un poligono regolare nel modo seguente:



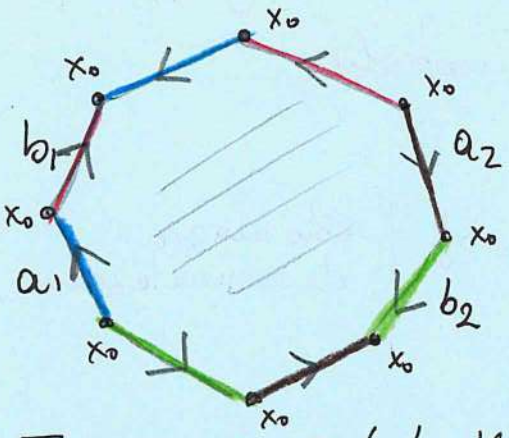
12



e quindi ottengo



che, a sua volta, è omeomorfo allo spazio di identificazione dell'ottagono regolare come in figura.



$\simeq \Sigma_2$

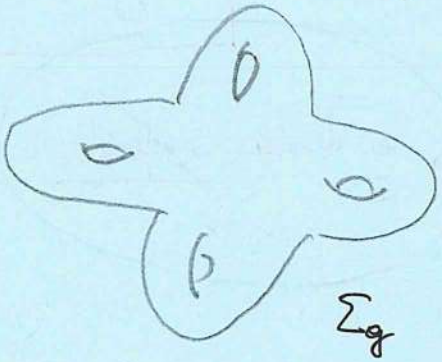
Applicando il Teorema di Seifert-Van Kampen come negli esempi precedenti, ottengo subito la presentazione:

$$\pi_1(\Sigma_2, x_0) = \pi_1(T^2 \# T^2, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = 1 \rangle$$

<u>Esercizio</u> Iterare la costruzione precedente, e dimostrare che se Σ_g indica la superficie topologica a forma di "ciambella con g buchi", allora ho

$$\Sigma_g \simeq \underbrace{T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ volte}}$$

(Si noti che si può porre $\Sigma_0 = S^2$)



Σ_g $(g=4)$

(Intuitivamente, fra la somma connessa con T^2 vuol dire "aggiungere un manico", e se partendo da una sfera aggiungo g "manici" ottengo appunto Σ_g).

Deduco da ciò che

$$\pi_1(\Sigma_g, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] \cdot \ldots \cdot [\alpha_g, \beta_g] = 1 \rangle$$

Dunque $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ ammette una presentazione con $2g$ generatori ed una sola relazione. Tale gruppo si indica a volte con Π_g. Si noti che

$$\Pi_g^{ab} = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \text{solo relazioni di commutazione} \rangle$$
$$\simeq \mathbb{Z}^{2g}$$

In particolare,

$$\Pi_g^{ab} \text{ è } \underline{\text{non isomorfo}} \text{ a } \Pi_{g'}^{ab} \text{ se } g \neq g',$$

Dunque Π_g è non isomorfo a $\Pi_{g'}$ se $g \neq g'$.

Da ciò deduciamo subito che

$$\boxed{\Sigma_g \text{ è } \underline{\text{non}}\ \underline{\text{omeomorfo}} \text{ a } \Sigma_{g'} \text{ se } g \neq g'}$$

Σ_g è detta $\underline{\text{superficie}}$ $\underline{\text{topologica chiusa di genere } g}$.